ملخص رياضيات 2-3

ثاني ثانوي مسارات

الفصل الدراسي الثالث

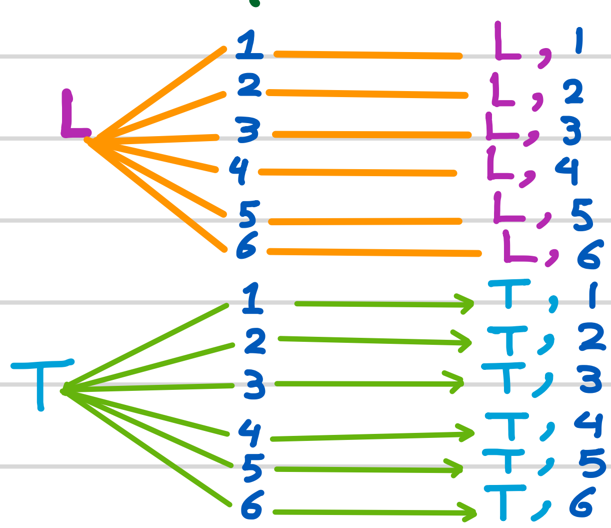
تمثيل فضاء العيِّنة
Representing Sample Spaces

✓ تحقق من فهمك

1) أُلقيت قطعة نقد مرة واحدة، ثم رمي مكعب مرقّم مرة واحدة أيضًا. مثّل فضاء العيِّنة لهذه التجربة باستعمال القائمة المنظمة، والجدول، والرسم الشجري.

الرسم الشجري

قطعة نقود　　مكعب　　النواتج



بطريقة الجدول

	1	2	3	4	5	6
T	(T, 1)	(T, 2)	(T, 3)	(T, 4)	(T, 5)	(T, 6)
L	(L, 1)	(L, 2)	(L, 3)	(L, 4)	(L, 5)	(L, 6)

القائمة المنظمة

T, 1　T, 2　T, 3　T, 4　T, 5　T, 6

L, 1　L, 2　L, 3　L, 4　L, 5　L, 6

عدد النواتج = قطعة نقود × مكعب

$2 \times 6 = 12$

✓ تحقق من فهمك

2) **هواتف:** يرغب مصطفى في شراء هاتف نقال، ويمكنه أن يختاره بلون فضي(S) أو أسود(B) أو أحمر(R)، وأن يكون بكاميرا (C) أو بدونها (NC). ويمكنه أن يحصل على سماعات (H) و/ أو غطاء للجهاز(W). مثّل فضاء العيِّنة لهذا الموقف بالرسم الشجري.

عدد النواتج = اللون × الكاميرا × السماعات × الغطاء

$= 3 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 24$

✓ تحقق من فهمك

أوجد عدد النواتج الممكنة في الحالات الآتية:

3A) اختيار إجابات لجميع الأسئلة المبينة في النموذج المجاور.

نموذج الإجابة

1. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ　4
2. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ　4
3. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ　4
4. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ　4
5. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ　4
6. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ　4
7. Ⓣ Ⓕ　2
8. Ⓣ Ⓕ　2
9. Ⓣ Ⓕ　2
10. Ⓣ Ⓕ　2

عدد الأسئلة = 10

عدد النواتج $= 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 65536$

3B) رمي مكعب مرقّم أربع مرات.

عدد النواتج = مكعب (1) × مكعب (2) × مكعب (3) × مكعب (4)

$= 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 1296$

3C) **أحذية:** اختيار زوج من الأحذية من بين المقاسات: 45 , 44 , 43 , 42 , 41 , 40 , 39 ، بلون أسود أو بني أو رمادي أو أبيض، ويمكن أن يكون من الجلد الطبيعي أو الصناعي، وهناك ثلاثة أشكال مختلفة للحذاء.

عدد النواتج = المقاسات × اللون × الجلد × الأشكال

$= 7 \times 4 \times 2 \times 3 = 168$

تأكد

1) عندما يسدّد اللاعب ركلة الجزاء فإنه يسجل هدفًا (G) أو لا يسجل (O). افرض أن اللاعب سدّد ركلة جزاء مرتين.

الجدول

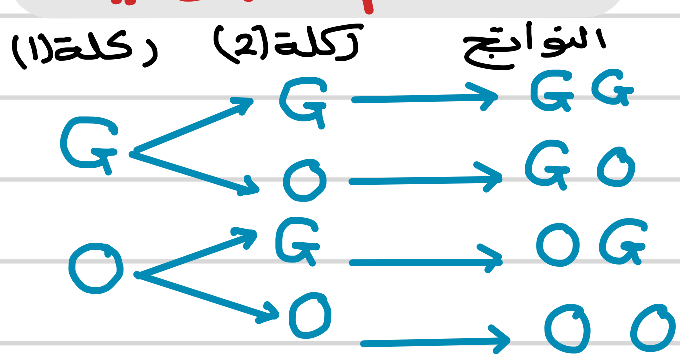
الركلة (2)

الركلة (1)	G	O
G	GG	GO
O	OG	OO

القائمة المنظمة

GG GO
OG OO

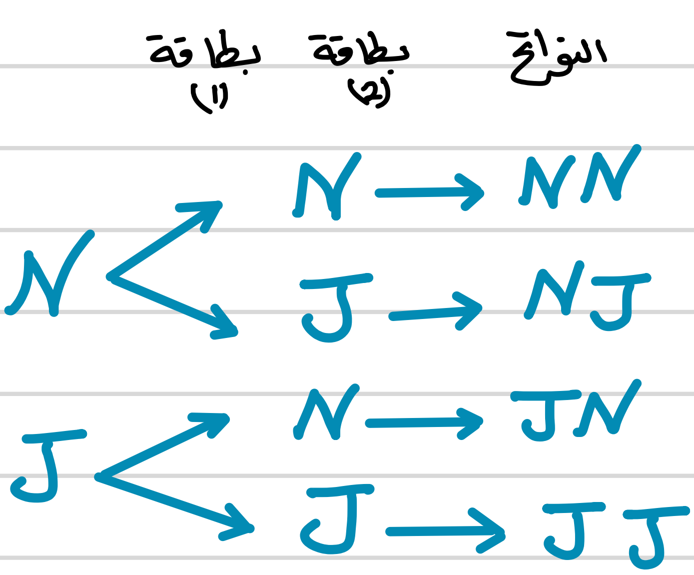
الرسم الشجري



عدد النواتج $= 2 \times 2 = 4$

2) سحب سمير بطاقتين على التوالي مع الإرجاع من كيس فيه بطاقات كتب عليها: (عصير مجاني J) أو (دفتر ملحوظات مجاني N).

الرسم الشجري



الجدول

بطاقة (2)

بطاقة (1)	N	J
N	NN	NJ
J	JN	JJ

القائمة المنظمة

NN NJ
JN JJ

4) مطاعم: عُرضت قائمة بالمأكولات في أحد المطاعم تتضمن الأصناف المبينة في الجدول المجاور، وكلٌّ صنف منها يحتوي على عدد من الأنواع. افرض أنه يتم اختيار طبق واحد من كلٍّ صنف ونوع، فما عدد النواتج الممكنة؟

قائمة المأكولات	عدد البدائل
المقبلات	8
الحساء	4
السلطة	6
الطبق الرئيس	12
الحلوى	9

$8 \times 4 \times 6 \times 12 \times 9 = 20736$

---

5) تنظم إحدى المدارس الثانوية زيارة إلى مركز الملك عبدالعزيز التاريخي (C) وإلى جامعة الملك سعود (U). لطلبة الصف الأول والثاني الثانوي. عدد النواتج $= 2 \times 2 = 4$

الجدول

الجامعة

الصف	C	U
1	1,C	1,U
2	2,C	2,U

القائمة المنظمة

1,C 1,U

2,C 2,C

الرسم الشجري

1 → C → 1,C
1 → U → 1,U
2 → C → 2,C
2 → U → 2,U

---

6) لدى خالد فرصة للسفر إلى الخارج ضمن برنامج تدريبيٍّ لمدة شهر أو شهرين، ويمكنه أن يختار مصر أو الأردن.

الجدول

الدولة

الشهر	مصر	الأردن
1	م، 1	أ، 1
2	م، 2	أ، 1

القائمة المنظمة

الأردن، 1 الأردن، 2

مصر، 1 مصر، 2

الرسم الشجري

الدولة الشهر النواتج

الأردن → 1 → 1، أ
الأردن → 2 → 2، أ
مصر → 1 → 1، م
مصر → 2 → 2، م

---

11) نشاطات: تجري في إحدى المدارس الثانوية قرعة لاختيار مسؤولي أنشطة من الطلاب. حيث كان عدد الطلاب المرشحين للأنشطة المختلفة: 3 طلاب للنشاط الرياضي وَ 4 طلاب للنشاط العلمي وَ 5 طلاب للتوعية الإسلامية وَ طالبان للإذاعة المدرسية، على ألا يرشح الطالب نفسه لأكثر من نشاط. فما عدد النواتج الممكنة؟

$3 \times 4 \times 5 \times 2 = 120$

3-2 الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق
Probability with Permutations and Combinations

مفهوم أساسي — **المضروب** — أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: يُكتب **مضروب** العدد الصحيح الموجب n على الصورة $n!$، ويساوي حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة التي هي أصغر من أو تساوي n.

بالرموز: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

وقد اتفق على اعتبار أن $0! = 1$.

لماذا؟

وقف يوسف وعليٌّ وفراس وفهد لالتقاط صورة جماعية لهم. وهناك 4 خيارات لمن يقف في أقصى اليمين ، و 3 خيارات لمن يقف في المكان الثاني، وخياران للمكان الثالث، وخيار واحد للمكان الأخير.

تمارين إضافية
7، 11 ، 22

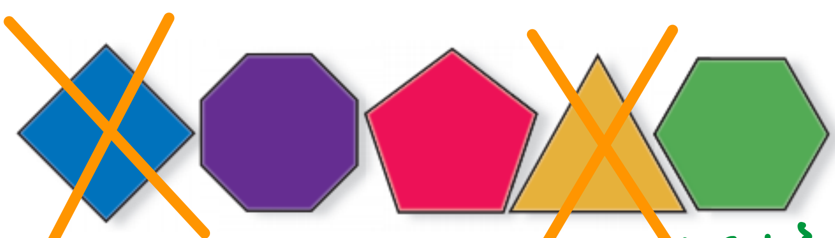
تحقق من فهمك

1) **تصوير:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟". ما احتمال أن يُختار علي ليقف في أقصى يسار الصورة، وأن يقف فراس في أقصى يمينها؟

١/ فضاء العينة = $4! = 4\times3\times2\times1 = 24$

٢/ الاحتمال = $\frac{2!}{4!} = \frac{\cancel{2\times1}}{4\times3\times\cancel{2\times1}} = \frac{1}{12}$ ← (ثبتنا علي وفراس)

1) **هندسة:** إذا طُلب إليك ترتيب المضلعات المبيّنة أدناه في صفٍّ من اليمين إلى اليسار، فما احتمال أن يكون المثلّث هو الأول والمربع هو الثاني؟

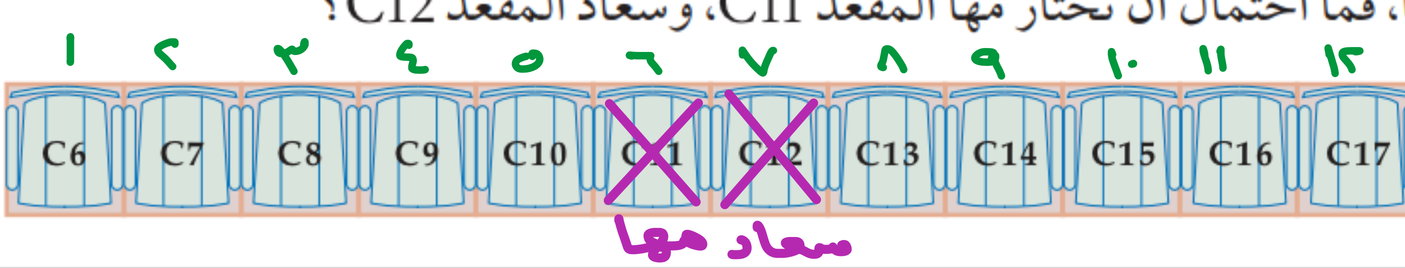


١/ فضاء العينة = $5! = 5\times4\times3\times2\times1$
$= 120$

ترتيب 3 أشكال

٢/ الاحتمال = $\frac{3!}{5!} = \frac{\cancel{3\times2\times1}}{5\times4\times\cancel{3\times2\times1}} = \frac{1}{20}$

6) **محاضرات:** ذهبت مها وسعاد لحضور محاضرة علمية. إذا اختارت كلٌّ منهما مقعدًا في الصف المبين أدناه عشوائيًّا، فما احتمال أن تختار مها المقعد C11، وسعاد المقعد C12؟



١/ فضاء العينة = $12!$

٢/ الاحتمال = $\frac{10!}{12!} = \frac{\cancel{10\times9\times8\ldots\times3\times2\times1}}{12\times11\times\cancel{10.9\ldots\times3\times2\times1}} = \frac{1}{132}$

مفهوم أساسي — التباديل

أضف إلى مطويتك

بالرموز: يرمز إلى عدد **تباديل** n من العناصر المختلفة مأخوذة r في كل مرة بالرمز ${}_nP_r$ حيث

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: عدد تباديل 5 عناصر مأخوذة 2 في كل مرة يساوي:

$${}_5P_2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 20$$

✓ تحقق من فهمك

2) **بطاقات جامعية:** تستعمل الأرقام 9–1 دون تكرار؛ لعمل بطاقات للطلاب مكونة من 8 منازل.

$n = 9$
$r = 8$

A) ما عدد البطاقات الجامعية الممكنة؟

$${}_nP_r = {}_9P_8 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \ldots 2$$
$$= 362880$$

B) إذا اختيرت بطاقة جامعية عشوائيًّا، فما احتمال أن تحمل أحد الرقمين 42135976, 67953124؟

$$\text{الاحتمال} = \frac{2}{362880}$$

---

2) **معرض علمي:** تعرض جماعة النادي العلمي البالغ عدد أفرادها 40 طالبًا في مدرسة ثانوية تجارب علمية، إذا اختير ثلاثة طلاب من الجماعة عشوائيًّا، فما احتمال أن يتم اختيار عبد المجيد للإشراف على تجارب الفيزياء، وزيد للإشراف على تجارب الكيمياء، ومحمود للإشراف على تجارب الأحياء؟

$n = 40$
$r = 3$

١/ فضاء العينة $= {}_{40}P_3$

٢/ $\text{الاحتمال} = \frac{1}{{}_{40}P_3}$

---

8) **مجموعات:** تمّ اختيار شخصين عشوائيًّا من مجموعة من عشرة أشخاص. ما احتمال اختيار طارق أولًا ثم سليم ثانيًا؟

$n = 10$
$r = 2$

١/ فضاء العينة $= {}_{10}P_2 = 10 \times 9 = 90$

٢/ $\text{الاحتمال} = \frac{1}{{}_{10}P_2} = \frac{1}{10\times 9} = \frac{1}{90}$

مفهوم أساسي — التباديل مع التكرار

أضف إلى مطويتك

عدد التباديل المختلفة لعناصر عددها n عندما يتكرر عنصر منها r_1 من المرات وآخر r_2 من المرات وهكذا . . .، فإنه يساوي:

$$\frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \ldots \cdot r_k!}$$

الأرقام مكررة

مثل رقم جوال
0555 3331

تحقق من فهمك

3) **أعداد:** تم تكوين عدد مكون من 6 أرقام عشوائيًا باستعمال الأرقام 3 ,5 ,1 ,2 ,5 ,1، ما احتمال أن يكون أول رقم في العدد هو 5 وآخر رقم هو 5 أيضًا؟

$n=6 \quad r_1=2 \quad r_2=2$

١/ فضاء العينة $= \frac{6!}{2! \cdot 2!} = \frac{6.5.\cancel{4}.3.2.1}{\cancel{(2.1)} \cdot \cancel{(2.1)}} = 180$

٢/ بعد تثبيت الرقم 5 أول رقم وآخر رقم يتم تكوين العدد مكون من 4 أرقام (1, 2, 3, 1)

الحادثة $= \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times \cancel{2 \times 1}}{\cancel{2 \times 1}} = 12$

الاحتمال $= \frac{12 \div 6}{180 \div 6} = \frac{2 \div 2}{30 \div 2} = \frac{1}{15}$

3) **أعداد:** يتكون عدد من الأرقام 1, 3, 3, 3, 6, 6, 5. ما احتمال أن يكون هذا العدد 5663133؟

$n=7 \quad r_1=2 \quad r_2=3$

١/ فضاء العينة $= \frac{7!}{2!\,3!} = \frac{7.6.5.\overset{2}{\cancel{4}}.\cancel{3.2.1}}{\cancel{(2.1)}\cancel{(3.2.1)}} = 420$

٢/ الاحتمال $= \frac{1}{420}$

10) **رموز بريدية:** ما احتمال أن يكون الرمز البريدي 97275 إذا تم تكوينه عشوائيًا من الأرقام 2, 7, 5, 9, 7؟

$n=5, \quad r_1=2$

١/ فضاء العينة $= \frac{5!}{2!} = \frac{5\,4.3.\cancel{2.1}}{\cancel{2.1}} = 60$

٢/ الاحتمال $= \frac{1}{60}$

22) **إجابة قصيرة:** إذا اخترت تبديلًا للأحرف المبينة أدناه عشوائيًا، فما احتمال أن تكون كلمة "فسيفساء"؟

$n=7$

ف	ء	س	ف	ي	س	ا

١/ فضاء العينة $= \frac{7!}{(2!)(2!)}$

٢/ الاحتمال $= \frac{1}{\frac{7!}{2! \cdot 2!}} = \frac{(2!)(2!)}{7!}$

مفهوم أساسي

التباديل الدائرية

أضف إلى مطويتك

عدد التباديل المختلفة لـ n من العناصر مرتبة على دائرة يساوي:

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

نقطة مرجعية ثابتة

تبديل خطي

تبديل دائري.

تحقق من فهمك

4A) بطاقات: إذا رتبت 5 بطاقات مُسجل عليها الأسماء: (حسن، محمد، أحمد، سالم، سعود) على منضدة دائرية عشوائيًّا، فما احتمال ظهورها كما في الشكل المجاور؟

لاتوجد نقطة مرجعية تباديل دائري

١/ عدد التباديل الدائرية $= \frac{5!}{5} = (5-1)! = 4! = 4\times3\times2\times1 = 24$

٢/ الاحتمال $= \frac{1}{24}$

4B) كرة قدم: تجمَّع فريق كرة قدم مكوَّن من 11 لاعبًا على شكل حلقة يتشاورون قبل بداية المباراة، إذا وقف حكم المباراة تمامًا خلف أحدهم، فما احتمال وقوف الحكم خلف حارس المرمى؟ وضِّح تبريرك.

توجد نقطة مرجعية (وقوف الحكم) ← تبديل خطي

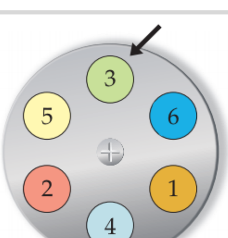
١/ فضاء العينة $= 11!$

٢/ الحادثة (ترتيب اللاعبين ماعدا الحارس) $= 10!$

الاحتمال $= \frac{10!}{11!} = \frac{\cancel{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}}{11\cdot\cancel{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}} = \frac{1}{11}$

4) كيمياء: في معمل الكيمياء طُلب إليك اختبار ست عينات رُتِّبت عشوائيًّا على منضدة دائرية.

لاتوجد نقطة مرجعية



a) ما احتمال ظهور الترتيب المبين في الشكل المجاور؟

١/ فضاء العينة $= (6-1)! = 5! = 120$

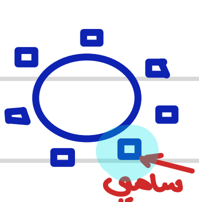
٢/ الاحتمال $= \frac{1}{120}$

b) ما احتمال أن تكون العينة 2 في المكان المشار إليه بسهم على الرسم؟

توجد نقطة مرجعية بسبب السهم على العينة (3)

الاحتمال $= \frac{\text{ترتيب 5 عينات}}{\text{ترتيب 6 عينات}} = \frac{5!}{6!} = \frac{1}{6}$

11) مجموعات: يرتب سامي المقاعد على صورة دوائر للعمل في مجموعات متعاونة. إذا كان في دائرة سامي 7 مقاعد، فما احتمال أن يكون مقعد سامي هو الأقرب إلى الباب؟



الاحتمال $= \frac{\text{ترتيب المقاعد من غير سامي}}{\text{ترتيب 7 مقاعد}} = \frac{6!}{7!} = \frac{1}{7}$

مفهوم أساسي — التوافيق

أضف إلى مطويتك

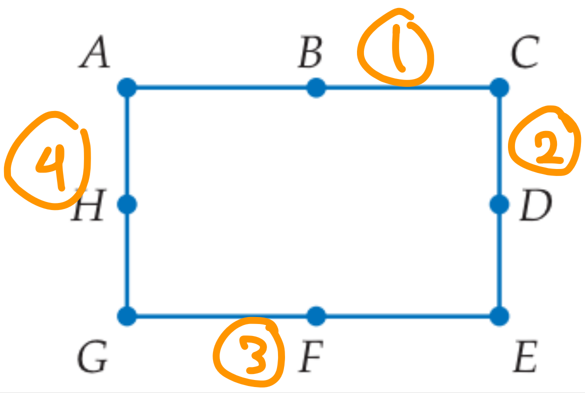
بالرموز: يرمز إلى عدد توافيق n من العناصر المختلفة مأخوذة r في كل مرة بالرمز $_nC_r$ ، حيث $_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

$$_nC_r = \frac{_nP_r}{r!}$$

مثال: عدد توافيق 8 عناصر مأخوذة 3 في كل مرة يساوي:

$$_8C_3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8\cdot 7\cdot \cancel{6}\cdot \cancel{5!}}{\cancel{6}\cdot \cancel{5!}} = 56$$

تحقق من فهمك



5) **هندسة:** إذا تم اختيار ثلاث نقاط عشوائيًا من النقاط المسماة على المستطيل في الشكل المجاور، فما احتمال أن تقع النقاط الثلاث على قطعة مستقيمة واحدة؟

عدد النقاط = ١٥ $n = 10$ $r = 3$

١/ عدد اختيار النقاط $8C_3 = \frac{8\times 7\times \cancel{6}}{\cancel{3\times 2\times 1}} = 56$

٢/ الاحتمال = $\frac{4}{56} = \frac{\cancel{4}}{7\times \cancel{8}\,2} = \frac{1}{7.2} = \frac{1}{14}$

---

5) **مسابقات:** اشترك 15 طالبًا من الصف الثاني الثانوي في مسابقة ثقافية. إذا اختير منهم 4 طلاب عشوائيًا، فما احتمال أن يكونوا: ماجد وعبدالعزيز وخالد وفوزي؟

١/ فضاء العينة $15C_4 = \frac{15\times \cancel{14}^{2}\times 13\times \cancel{12}}{\cancel{4\times 3}\times \cancel{2\times 1}} = 1365$

٢/ الاحتمال = $\frac{1}{1365}$

---

15) **مستقيمات:** ما عدد المستقيمات التي يمكن رسمها من 10 نقاط ولا تقع أيٌّ ثلاث منها على استقامة واحدة؟ وضّح إجابتك.

$n = 10$ $r = 2$ (مستقيم يتكون من نقطتين)

عدد المستقيمات $10C_2 = \frac{10\times 9}{2\times 1} = \frac{90}{2} = \boxed{45}$

تحقق من فهمك

إذا اختيرت النقطة X عشوائيًا على $\overline{JM}$ في الشكل السابق، فأوجد كلًّا ممَّا يأتي:

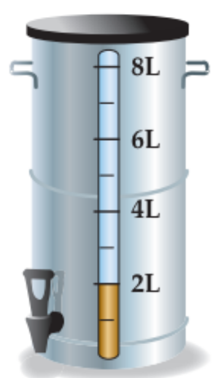
مجموع الأطوال = $3+7+4 = 14$

(1A $P(X \in \overline{LM})$ $= \frac{4 \div 2}{14 \div 2} = \frac{2}{7} = 0.285 = 28.5\%$

(1B $P(X \in \overline{KM})$ $= \frac{11}{14} = 0.785 = 78.5\%$

تحقق من فهمك

(2 **شاي:** يحضِّر مطعم الشاي في وعاء سعته 8L، وعندما ينخفض مستوى الشاي في الوعاء عن 2L، يصبح تركيز الشاي كبيرًا ويختلف طعمه.



(A إذا حاول شخص ملء كأس من الشاي، فما احتمال أن يكون مستوى الشاي في الوعاء تحت مستوى 2L؟

الاحتمال $= \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$

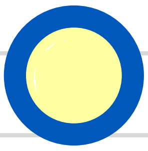
(B ما احتمال أن يكون مستوى الشاي في الوعاء في أيِّ وقت بين 2L و 3L؟ ← لتر واحد

الاحتمال $= \frac{1}{8} = 0.125 = 12.5\%$

تحقق من فهمك

(3 **الهبوط بالمظلات:** أوجد كلًّا مما يأتي بالاعتماد على المثال السابق.

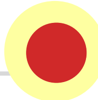
(A P(أن يهبط المظلي في المنطقة الزرقاء)



الاحتمال = $\frac{\text{الحادثة}}{\text{الهدف}} = \frac{\text{الزرقاء - البيضاء}}{\text{الهدف}}$

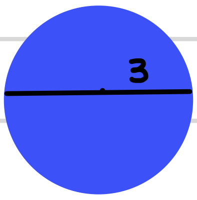
$= \frac{9\pi - 4\pi}{9\pi} = \frac{5\pi}{9\pi} = \frac{5}{9}$

(B P(أن يهبط المظلي في المنطقة البيضاء)

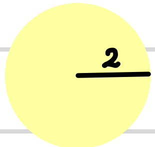


الاحتمال = $\frac{\text{الحادثة}}{\text{الهدف}} = \frac{\text{البيضاء - الحمراء}}{\text{الهدف}}$

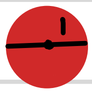
$= \frac{4\pi - \pi}{9\pi} = \frac{3\pi}{9\pi} = \frac{1}{3}$



مساحة الزرقاء $= (3)^2\pi = 9\pi$



مساحة البيضاء $= (2)^2\pi = 4\pi$



مساحة الحمراء $= (1)^2\pi = \pi$

تحقق من فهمك

استعمل القرص ذا المؤشر الدوّار في الشكل المجاور لإيجاد كلٍّ مما يأتي:

مجموع الزوايا $= 360°$

4A) P(عدم استقرار المؤشر على اللون الأخضر)

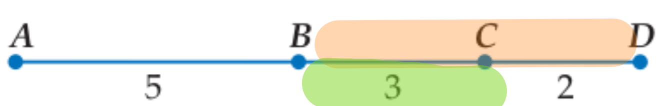
مجموع الزوايا غير اللون الأخضر $= 70 + 50 + 105 + 45 = 270$

الاحتمال $= \frac{270}{360} = \frac{3}{4} = 0.75 = 75\%$

4B) P(استقرار المؤشر على اللون الأزرق)

الاحتمال $= \frac{70}{360} = 0.194 = 19\%$

تأكد



إذا اختيرت النقطة X عشوائيًّا على $\overline{AD}$ في الشكل المجاور، فأوجد كلًّا مما يأتي:

مجموع الأطوال $= 2 + 3 + 5 = 10$

1) P(أن تقع X على $\overline{BD}$)

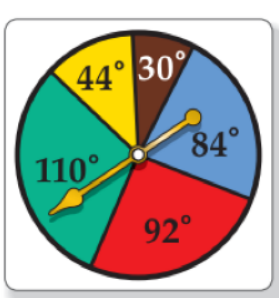
الاحتمال $= \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$

2) P(أن تقع X على $\overline{BC}$)

الاحتمال $= \frac{3}{10} = 0.3 = 30\%$

استعمل القرص ذا المؤشر الدوّار لإيجاد كلٍّ مما يأتي (إذا استقر المؤشر على الخط الفاصل بين القطاعات الملونة يُعاد تدويره):

مجموع الزوايا $= 360$

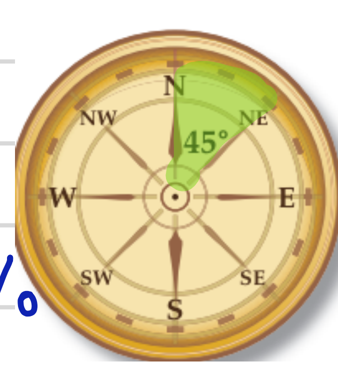


14) P(استقرار المؤشر على اللون الأصفر) $= \frac{44}{360} = \frac{11}{90} = 0.122$

15) P(استقرار المؤشر على اللون الأزرق) $= \frac{84}{360} = \frac{7}{30} = 0.233$

17) P(عدم استقرار المؤشر على اللون الأحمر ولا على اللون الأصفر) $= \frac{30 + 84 + 110}{360} = \frac{224}{360} = 0.622$

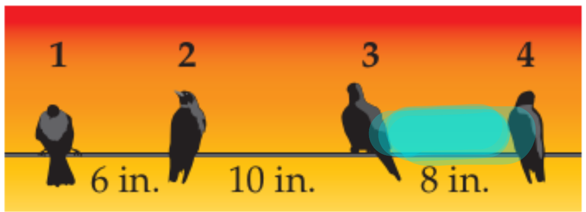
5) **ملاحة:** ضَلّ أحد طلبة الكشافة طريقه في غابة، فوجّه بوصلته عشوائيًّا كما في الشكل أدناه. أوجد احتمال أن يوجه البوصلة باتجاه المنطقة المحصورة بين الشمال (N) والشمال الشرقي (NE).



$\frac{45 \div 45}{360 \div 45} = \frac{1}{8}$

$= 0.125 = 12.5\%$

9) **طيور:** تقف أربعة طيور عند نقاطٍ على سلكٍ كما في الشكل المجاور. فإذا هبط طائر خامس عشوائيًّا على نقطة من نقاط السلك فما احتمال أن يقف بين الطائر رقم 3 والطائر رقم 4؟

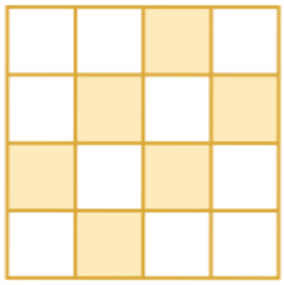


المسافة بين أول طائر وآخر طائر = 24

الاحتمال = $\frac{8}{24} = \frac{1}{3} = 0.33$

اخترت نقطة عشوائيًّا في كلٍّ من الأشكال الآتية، أوجد احتمال وقوعها في المنطقة المظلّلة.

11)

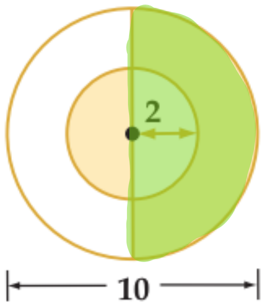


الاحتمال = $\frac{\text{عدد المربعات المظللة}}{\text{عدد المربعات}}$

$= \frac{6}{16} = \frac{3}{8} = 0.375 = 37,5\%$

---

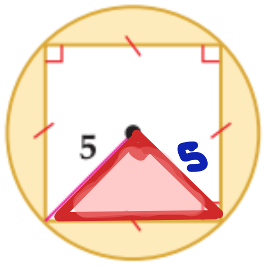
12)



الاحتمال = $\frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$

---

13)



نصف القطر = 5

1/ مساحة الدائرة = $(5)^2\pi = 25\pi$

طول ضلع المربع = $5\sqrt{2}$

$\sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{50} = \sqrt{2\times25} = \boxed{5\sqrt{2}}$

2/ مساحة المربع = $(5\sqrt{2})^2 = 25\times2 = 50$

أو $\frac{\text{ضرب القطرين}}{2} = \frac{10\times10}{2} = 50$

3/ مساحة المنطقة المظللة = الدائرة − المربع = $25\pi - 50$

4/ الاحتمال = $\frac{\text{المظللة}}{\text{الدائرة}}$

$= \frac{25\pi-50}{25\pi} = \frac{25\pi}{25\pi} - \frac{50}{25\pi} = 1 - \frac{2}{\pi}$

تحقق من فهمك

حدّد إذا كانت الحادثتان مستقلتين أم غير مستقلتين في كلٍّ مما يأتي، ووضّح إجابتك:

1A) سُحبت بطاقة من مجموعة بطاقات، ثم أعيدت إلى المجموعة، ثم سحبت بطاقة ثانية.

الحادثتان مستقلتان

1B) إلقاء قطعة نقد مرة واحدة، ثم رمي مكعب مرقّم مرة واحدة أيضًا.

الحادثتان مستقلتان

2A) إذا أُلقيت قطعة نقد ورُمي مكعب مرقّم مرة واحدة. $\boxed{\text{فما احتمال}}$ ظهور الشعار والعدد 6؟

الاحتمال = قطعة نقود × مكعب 6×2

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \approx 8\%$$

2B) إذا أُلقيت قطعة نقد أربع مرات متتالية. $\boxed{\text{فما احتمال}}$ الحصول على كتابة أربع مرات؟

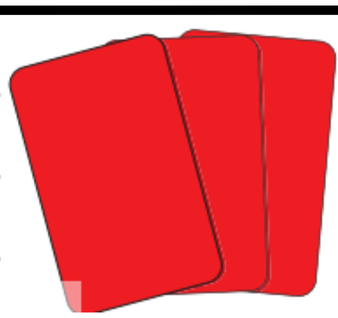
الاحتمال = قطعة 1 × قطعة 2 × قطعة 3 × قطعة 4

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16} = 6.25\%$$

عدد نواتج رمي قطعة نقود 4 مرات = 16

والحادثة ظهور كتابة 4 مرات = 1

$\{(T, T, T, T)\}$ الاحتمال $= \frac{1}{16}$



3) بطاقات: يحتوي صندوق على 24 بطاقة، منها 6 بطاقات زرقاء مرقّمة من 1 إلى 6 وبالمثل 6 بطاقات حمراء و 6 صفراء و 6 خضراء. $\boxed{\text{ما احتمال}}$ سحب 3 بطاقات حمراء الواحدة تلو الأخرى إذا كان السحب دون إرجاع؟

غير مستقلتان فضاء العينة يقل

الاحتمال = بطاقة (1) × بطاقة 2 × بطاقة 3

$$\frac{\cancel{6}^{1}}{\cancel{24}_{4}} \times \frac{5}{23} \times \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{22}_{11}}$$

$$= \frac{1 \times 5 \times 2}{4 \times 23 \times 11} = \frac{5}{506}$$

(4 عند رمي مكعبين مرقّمين متمايزين مرة واحدة، ما احتمال أن يظهر العدد 4 على أحدهما إذا كان مجموع العددين على الوجهين الظاهرين يساوي 9؟

4 ÷ 2

احتمال مشروط

A $\frac{1}{6}$ B $\frac{1}{4}$ C $\frac{1}{3}$ D $\frac{1}{2}$

P(A) ظهور العدد 4 = $\frac{11}{36}$

P(B) مجموع العددين 9 = $\frac{4}{36}$

P(A∩B) ظهور العدد 4 ومجموعهم 9 = $\frac{2}{36}$

(1,4) , (4,1)
(2,4) , (4,2)
(3,4) , (4,3)
(4,4)
(4,5) , (4,5)
(4,6) , (4,6)

(6,3)
(3,6)
(4,5)
(5,4)

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{\cancel{36}}}{\frac{4}{\cancel{36}}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

إجابة أخرى:- الاحتمال = $\frac{\text{ظهور العدد 4}}{\text{مجموعهم 9}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

تأكد

حدّد إذا كانت الحادثتان في السؤالين (1، 2) مستقلتين أم غير مستقلتين، ووضِّح إجابتك:

(1 وصل فريق كرة القدم في مدرسة إلى الدور قبل النهائي، وإذا ربح فسيلعب في المباراة النهائية للبطولة.

غير مستقلتان

(2 نجاح عبد العزيز في اختبار الرياضيات يوم الأحد، ونجاحه في اختبار الفيزياء يوم الخميس.

مستقلتان

(3 **بطاقات:** يحتوي صندوق على 20 بطاقة مقسمة إلى أربع مجموعات متساوية لكلٍّ منها لون من الألوان الآتية: الأحمر، والأسود، والأخضر، والأزرق. سحبت بطاقة واحدة عشوائيًّا من الصندوق، ثم أُعيدت إليه، وبعد ذلك سُحبت بطاقة ثانية. ما احتمال اختيار بطاقة حمراء في المرتين؟

= 5

الحادثتان مستقلتان

الاحتمال = بطاقة حمراء × بطاقة حمراء

$$= \frac{5}{20} \times \frac{5}{20} = \frac{1}{16}$$

(5 **أصدقاء:** يلتقي 10 أصدقاء كل يوم عطلة ليلعبوا كرة القدم، ولتشكيل الفريقين يتم سحب بطاقات مرقّمة من 1 إلى 10 عشوائيًّا، ويشكل الذين يسحبون الأعداد الفردية الفريق A والذين يسحبون الأعداد الزوجية الفريق B. ما احتمال أن يكون أحد لاعبي الفريق B قد سحب العدد 10؟

$$P(A/B) = \frac{\text{سحب العدد 10}}{\text{بطاقات فريق B}} = \frac{1}{5}$$

حدّد إذا كانت الحادثتان في الأسئلة (6–9) مستقلتين أم غير مستقلتين، ثم أوجد الاحتمال:

6) رمي مكعب مرقّم للحصول على عدد زوجي، ثم إدارة مؤشر قرص مقسّم إلى قطاعات متطابقة، ومرقّم من 1 إلى 5؛ للحصول على عدد فردي. ← احتمال

الحادثتان مستقلتان

الاحتمال = مكعب × مؤشر قرص

$\frac{3}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$

7) اختيار طالبين حصلا على الدرجة الكاملة في اختبار للرياضيات، واحدًا تلو الآخر من صفٍّ فيه 25 طالبًا، 5 منهم حصلوا على الدرجة الكاملة.

الحادثتين غير مستقلتين

الاحتمال = طالب (1) × طالب (2)

$= \frac{5}{25} \times \frac{4}{24} = \frac{20}{600} = \frac{1}{30}$

8) تكرار سحب كرة زرقاء في تجربة سحب كرتين متتاليتين عشوائيًا دون إرجاع، من حقيبة بها 3 كرات خضراء و 4 كرات زرقاء.

غير مستقلتان

عدد الكور = 7

الاحتمال = زرقاء × زرقاء

$= \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$

9) ظهور العدد 5 على الوجهين العُلويين لمكعبين مرقّمين متمايزين أُلقيا مرة واحدة.

مستقلتان

(5,5)

الاحتمال = $\frac{1}{36}$

10) **ألعاب:** إذا أُدير مؤشر القرص المبيّن في الشكل المجاور وأُلقيت قطعة نقد مرة واحدة. فما احتمال الحصول على عدد زوجي وظهور كتابة على قطعة النقد؟

الاحتمال = مؤشر × قطعة نقود

$= \frac{3}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 25\%$

12) سُحبت كرة حمراء عشوائيًا من كيس يحتوي على كرتين زرقاوين و 9 كرات حمراء دون إرجاع. ما احتمال سحب كرة حمراء ثانية؟

مجموع الكور = 11

الاحتمال = حمراء (1) × حمراء (2)

$\frac{9}{11} \times \frac{8}{10}$

إحتمال سحب الكرة الحمراء الثانيه = $\frac{8}{10} = \frac{4}{5} = 80\%$

3-5 احتمالات الحوادث المتنافية
Probabilities of Mutually Exclusive Events

✓ تحقق من فهمك

حدِّد إذا كانت الحادثتان متنافيتين أم غير متنافيتين في كلٍّ مما يأتي، وبرّر إجابتك:

1A) اختيار عدد من الأعداد من 1 إلى 100 عشوائيًّا، والحصول على عدد يقبل القسمة على 5 أو عدد يقبل القسمة على 10 . غيرمتنافيتين

1B) الحصول على المجموع 6 أو المجموع 7، عند رمي مكعبين مرقّمين متمايزين مرة واحدة. متنافيتان

2A) إذا رُمي مكعبان مرقّمان متمايزان مرة واحدة. فما احتمال أن يظهر العدد نفسه على كلٍّ من وجهَي المكعبين أو أن يكون مجموع العددين 9 ؟

فضاء العينة = 36

(1,1) (2,2) (3,3) (4,4) (5,5) (6,6)

(4,5) (5,4) (6,3) (3,6)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$\frac{6}{36} + \frac{4}{36} = \frac{10 \div 2}{36 \div 2} = \frac{5}{18}$$

2B) **ألعاب:** إذا ربح طالب في مسابقة إلقاء الشعر في احتفال المدرسة باليوم الوطني للمملكة فسيُمنح جائزة. إذا اختيرت الجائزة عشوائيًّا من بين 15 محفظة و16 ساعة و14 نظارة و 25 قلمًا و10 كرات، فما احتمال أن يُمنح الفائز محفظة أو ساعة أو كرة؟

فضاء العينة = 15 + 16 + 14 + 25 + 10 = 80

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

$$\frac{15}{80} + \frac{16}{80} + \frac{10}{80} = \frac{41}{80}$$

فن: يبين الجدول المجاور 30 لوحة رسمها إبراهيم. إذا اختار إحدى هذه اللوحات عشوائيًّا للمشاركة في معرض للوحات الفنيّة، فما احتمال

لوحات إبراهيم

	أشكال هندسية	مناظر طبيعية	طبيعة صامتة	الوسيلة
12	3	5	4	ألوان مائية
6	2	3	1	ألوان زيتية
6	1	2	3	ألوان أكريل
6	5	0	1	ألوان باستيل
30	11	10	9	

3) **فن:** في المثال أعلاه، ما احتمال أن تكون اللوحة التي اختارها إبراهيم مائية أو شكلًا هندسيًّا؟

فضاء العينة = 30

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{12}{30} + \frac{11}{30} - \frac{3}{30} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

4) **أمطار:** إذا كان احتمال هطول المطر 70% فما احتمال عدم هطوله؟

$1 - 70\% = 30\%$

5) **هواتف نقالة:** أشارت إحدى الدراسات إلى أن 35% من السائقين يستعملون الهاتف النقّال أثناء قيادة السيارة. إذا اختير سائقان واحدًا تلو الآخر عشوائيًّا من مجموعة 100 سائق، فما احتمال أن يستعمل أحدهما على الأقل هاتفه النقّال أثناء القيادة؟

احتمال أن يستعمل السائق هاتفه النقال = 35%

احتمال أن لايستعمل هاتفه النقال = 65%

احتمال أن يستعمل أحدهما على الأقل هاتفه النقال :-

السائق (1) × السائق (2)

يستعمل × يستعمل $= \frac{35}{100} \times \frac{34}{99} = \frac{1190}{9900}$

لايستعمل × يستعمل $= \frac{65}{100} \times \frac{35}{99} = \frac{2275}{9900}$

يستعمل × لايستعمل $= \frac{35}{100} \times \frac{65}{99} = \frac{2275}{9900}$

مجموع $\frac{5740}{9900} = 0.5$

لايستعمل × لايستعمل $= \frac{65}{100} \times \frac{64}{99} = \frac{4160}{9900}$

أو

الاحتمال $= 1 - \frac{4160}{9900} = \frac{9900 - 4160}{9900} = 0.5$

تأكد

1) ظهور عدد فردي أو أكبر من 3 عند رمي مكعب مرقم مرة واحدة. غيرمتنافيتين

2) اختيار سيارة أو حصان. متنافيتان

3) **الموظف المثالي:** حصل سامي على جائزة أفضل أداء لموظفي شركة، وكانت جائزته أن يختار عشوائيًّا واحدة من بين 4 بطاقات سفر و 6 كتب و 10 ساعات و 3 حقائب، و 7 نظارات. ما احتمال أن يربح بطاقة سفر أو كتابًا، أو ساعة؟

فضاء العينة $= 4 + 6 + 10 + 3 + 7 = 30$

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

$= \frac{4}{30} + \frac{6}{30} + \frac{10}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

4) **نشاطات مدرسية:** بناءً على الجدول المجاور، اختير طالب في المدرسة. ما احتمال أن يكون الطالب من الصف الثاني الثانوي أو في نادي العلوم؟

النادي	الصف الأول الثانوي	الصف الثاني الثانوي	الصف الثالث الثانوي	
الرياضي	12	14	8	34
العلوم	2	6	3	11
الرياضيات	7	4	5	16
اللغة الإنجليزية	11	15	13	39
	32	39	29	100

فضاء العينة = 100

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{39}{100} + \frac{11}{100} - \frac{6}{100} = \frac{44}{100} = \frac{11}{25}$

5) **لعبة السهام:** إذا كان احتمال إصابتك الهدف عند رمي السهم تساوي $\frac{2}{10}$، فما احتمال أن تخطئ إصابة الهدف؟

$$1-\frac{2}{10}=\frac{10-2}{10}=\frac{8}{10}=80\%$$

6) **تخرج:** عدد طلاب الصف الثالث الثانوي في مدرسة 100 طالب. حضر حفل التخرج النهائي 91% منهم. إذا اختير طالبان واحدًا تلو الآخر عشوائيًا من طلاب الصف جميعهم، فما احتمال أن يكون أحدهما على الأقل لم يحضر الحفل؟

نسبة الحضور = 91%　　نسبة عدم الحضور = 9%

احتمال أن يكون أحدهما على الأقل لم يحضر　　1 طالب × 2 طالب

لم يحضر × لم يحضر $=\frac{9}{100}\times\frac{8}{99}=\frac{72}{9900}$

يحضر × لم يحضر $\frac{9}{100}\times\frac{91}{99}=\frac{819}{9900}$

لم يحضر × يحضر $\frac{91}{100}\times\frac{9}{99}=\frac{819}{9900}$

$\frac{1710}{9900}=0.173$ مجموع

يحضر × يحضر $\frac{91}{100}\times\frac{90}{100}=\frac{8190}{9900}\rightarrow 1-\frac{1710}{9900}=0.173$ أو

حدّد إذا كانت الحادثتان متنافيتين أو غير متنافيتين (في كلٍّ من الأسئلة 7-9)، ثم أوجد الاحتمال، وقرّب النسبة المئوية إلى أقرب عُشر إذا كان ذلك ضروريًا:

7) رمي مكعبين مرقّمين متمايزين مرة واحدة للحصول على عددين متساويين أو عددين مجموعهما 8 على الوجهين الظاهرين.

(1,1) (2,2) (3,3) (4,4) (5,5) (6,6)

(2,6) (6,2) (4,4) (3,5) (5,3)

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

غير متنافيتين $=\frac{6}{36}+\frac{5}{36}-\frac{1}{36}=\frac{10\div 2}{36\div 2}=\frac{5}{18}$

8) اختيار عدد عشوائيًّا من 1 إلى 20، للحصول على عدد زوجي أو عدد يقبل القسمة على 3.

{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20}　{3, 6, 9, 12, 15, 18}

$P(A\cup B)=\frac{10}{20}+\frac{6}{20}-\frac{3}{20}=\frac{13}{20}$ غير متنافيتين

9) إلقاء قطعة نقد مرة واحدة للحصول على شعار أو كتابة.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

متنافيتان

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1=100\%$$

السباحة	الكرة الطائرة	كرة القدم	العمر
النادي الرياضي			
42	36	28	14
33	26	30	15
29	41	35	16

106
89
105
300 104 103 93

10) **رياضة:** يبين الجدول المجاور أنواع الرياضات التي يقدمها نادٍ رياضي وعدد المشاركين من الأعمار 16–14. ما احتمال أن يمارس مشارك السباحة أو أن يكون عمره 14؟

$$P(A \cup B) = \frac{104}{300} + \frac{106}{300} - \frac{42}{300}$$

$$= \frac{168}{300} = \frac{56}{100}$$

11) **هدايا:** أراد بعض الطلاب تقديم هدية لزميلهم لحصوله على لقب الطالب المثالي، فوجد معلم الصف أن 10 منهم اختاروا ساعة، و 12 اختاروا قميصًا، و 6 اختاروا هاتفًا نقالًا، و 4 اختاروا ميدالية. إذا اختار المعلم الهدية عشوائيًّا فما احتمال أن تكون هدية الطالب المثالي ساعة أو ميدالية؟

فضاء العينة $= 10 + 12 + 6 + 4 = 32$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= \frac{10}{32} + \frac{4}{32} = \frac{14 \div 2}{32 \div 2} = \frac{7}{16}$$

أوجد احتمال كل حادثة مما يأتي:

12) عدم ظهور العدد 3 على أيٍّ من الوجهين الظاهرين، عند إلقاء مكعبين مرقّمين متمايزين مرة واحدة.

ظهور العدد 3 :- $\frac{11}{36}$

عدم ظهور العدد 3 :- $\frac{25}{36} = \frac{36-11}{36} = 1 - \frac{11}{36}$

13) عدم ظهور الكتابة على الوجه الظاهر عند إلقاء قطعة نقد مرة واحدة.

ظهور الكتابة :- $\frac{1}{2}$

عدم ظهور الكتابة :- $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 50\%$

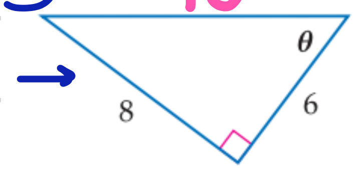
14) سحب خليل عشوائيًّا كرة من كيس فيه 25 كرة متماثلة، إحداها فقط حمراء. ما احتمال ألّا يسحب الكرة الحمراء؟

احتمال سحب الحمراء :- $\frac{1}{25}$

احتمال عدم سحب الحمراء $= 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}$

أوجد قيم الدوالّ المثلّثية الستّ للزاوية θ الموضّحة في كلٍّ ممّا يأتي:

(1



$$\text{الوتر} = \sqrt{6^2+8^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$$

$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

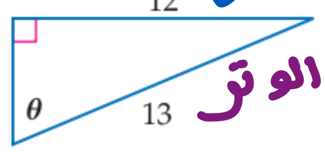
$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\csc\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

$$\sec\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$\cot\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

(13



$$\text{المجاور} = \sqrt{13^2-12^2} = \sqrt{169-144} = \sqrt{25} = 5$$

$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{12}{13}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{5}{13}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{12}{5}$$

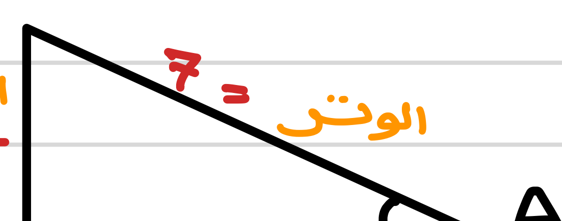
$$\csc\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{13}{12}$$

$$\sec\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{13}{5}$$

$$\cot\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{5}{12}$$

معتبرًا $\angle A$ زاوية حادّة في مثلّث قائم الزاوية، أجب عما يأتي:

(3 إذا كان $\cos A = \frac{4}{7}$ ، فما قيمة $\sin A$؟

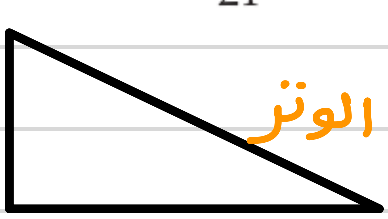


$$\cos A = \frac{4}{7} \quad \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$$\text{المقابل} = \sqrt{7^2-4^2} = \sqrt{49-16} = \sqrt{33}$$

$$\sin A = \frac{\sqrt{33}}{7}$$

(4 إذا كان $\tan A = \frac{20}{21}$، فما قيمة $\cos A$؟

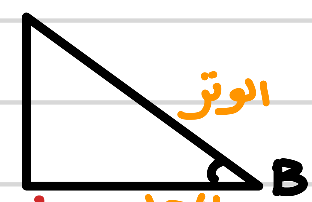


$$\tan A = \frac{20}{21} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\text{الوتر} = \sqrt{20^2+21^2} = \sqrt{400+441} = \sqrt{841} = 29$$

$$\cos A = \frac{21}{29}$$

19) إذا كان $\tan B = \frac{3}{1}$، فما قيمة $\sin B$؟



$\tan B = \frac{3}{1} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

$\text{الوتر} = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

$\sin B = \frac{3}{\sqrt{10}}$

تحقق من فهمك

2) إذا كان $\tan B = \frac{3}{7}$ ، فأوجد قيمة $\sin B$.

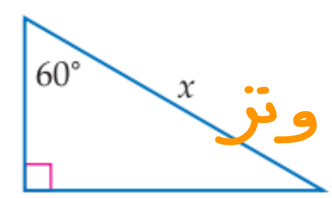
$\tan = \frac{3}{7}$ → المقابل → المجاور

$\text{الوتر} = \sqrt{3^2+7^2} = \sqrt{58}$

$\sin B = \frac{3}{\sqrt{58}}$

استعمل دالّة مثلَّثية لإيجاد قيمة x في كلٍّ ممَّا يأتي، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة:

(5



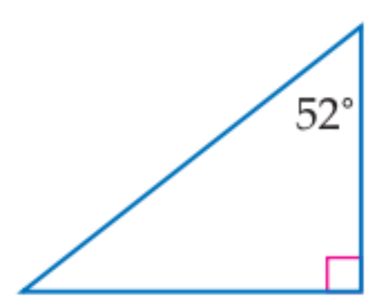
$\sin 60 = \frac{22}{x}$ مقابل → وتر

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{22}{x}$

$\frac{\sqrt{3}\,x}{\sqrt{3}} = \frac{44}{\sqrt{3}}$

$x = \frac{44}{\sqrt{3}}$

(6

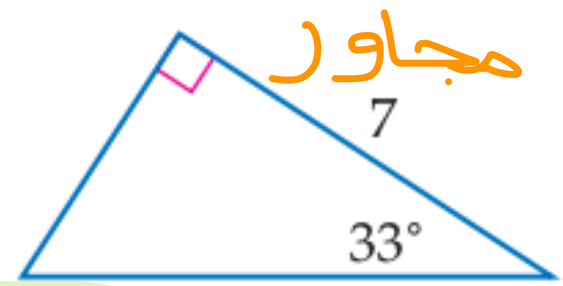


$\tan 52^\circ = \frac{x}{6}$ → مقابل → مجاور

$1.28 = \frac{x}{6}$

$x = 7.68$

(7



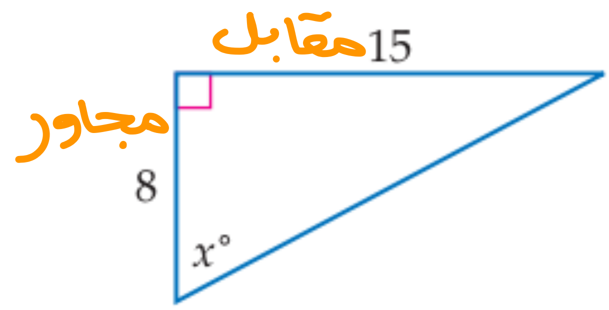
$\cos 33^\circ = \frac{7}{x}$

$0.84 = \frac{7}{x}$

$x = \frac{7}{0.84}$

$x = 8.33$

(9



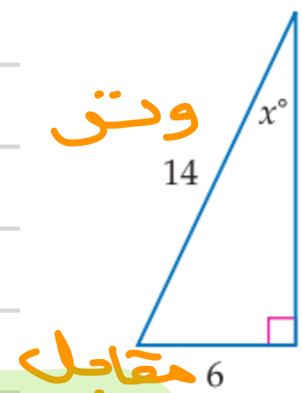
$\tan x = \frac{15}{8}$

$\tan x = 1.875$

$x = \tan^{-1} 1.875$

$x = 61.93^\circ$

(10



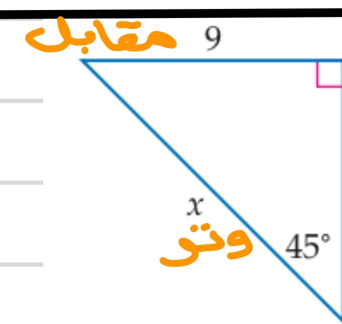
$\sin x = \frac{6}{14}$

$\sin x = 0.43$

$x = \sin^{-1} 0.43$

$x = 25.47^\circ$

(21



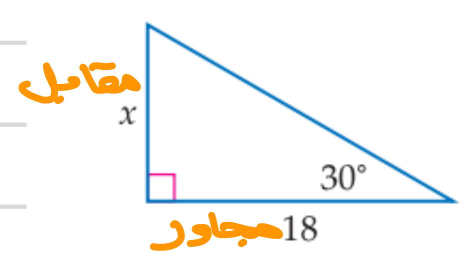
$\sin 45^\circ = \frac{9}{x}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{9}{x}$

$\sqrt{2}x = 18$

$x = \frac{18 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = 9\sqrt{2}$

(23



$\tan 30 = \frac{x}{18}$

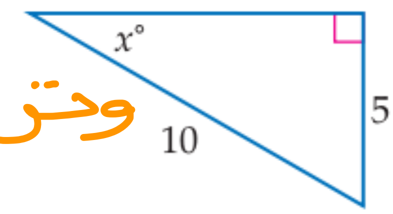
$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{18}$

$\sqrt{3}x = 18$

$x = \frac{18 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{18}{3}\sqrt{3}$

$x = 6\sqrt{3}$

(29



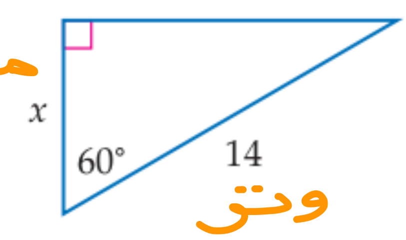
$$\sin x = \frac{5}{10}$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = \sin^{-1} \frac{1}{2}$$

$$x = 30$$

(3A



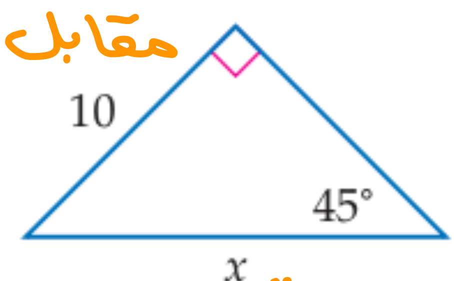
$$\cos 60 = \frac{x}{14}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{14}$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{14}{2}$$

$$x = 7$$

(3B



$$\sin 45^\circ = \frac{10}{x}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{10}{x}$$

$$\sqrt{2}\, x = 2(10)$$

$$\sqrt{2}\, x = 20$$

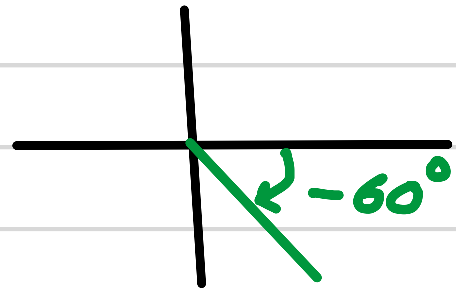
$$x = \frac{20 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{20}{2}\sqrt{2}$$

$$x = 10\sqrt{2}$$

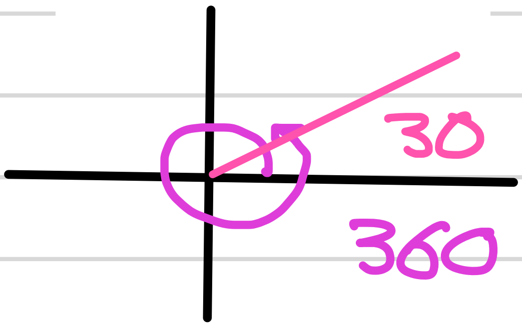
ارسم كلًّا من الزوايا الآتية المُعطى قياسها في الوضع القياسي:

(1 140°

(2 -60°



(3 390°



في كلٍّ ممّا يأتي، أوجد زاويتين، إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب، مشتركتين في ضلع الانتهاء مع الزاوية المُعطاة:

(3A 15°

زاوية بقياس موجب $15 + 360 = 375^\circ$

زاوية بقياس سالب $15 - 360 = -345^\circ$

(3B -45°

زاوية بقياس موجب $-45 + 360 = 315^\circ$

$-45 - 360 = -405^\circ$

(4 25°

زاوية بقياس موجب $25 + 360 = 385^\circ$

زاوية بقياس سالب $25 - 360 = -335^\circ$

(5 175°

زاوية بقياس موجب $175^\circ + 360 = 533^\circ$

زاوية بقياس سالب $175 - 360 = -185^\circ$

(6 -100°

زاوية بقياس موجب $-100 + 360 = 260^\circ$

زاوية بقياس سالب $-100 - 360 = -460^\circ$

حوِّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات في كلٍّ ممّا يأتي:

(4A 120°

$$120 \times \frac{\pi}{180} = \frac{12\pi}{18} = \frac{2\pi}{3}$$

(4B $-\frac{3\pi}{8}$

$$-\frac{3\cancel{\pi}}{8} \times \frac{180}{\cancel{\pi}} = \frac{-3 \times \cancel{180}^{45}}{\cancel{8}_{2}} = -76.5$$

(7 $\frac{\pi}{4}$

$\frac{\cancel{\pi}}{4} \times \frac{180}{\cancel{\pi}} = \frac{180}{4} = 45^\circ$

(8 225°

$225^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{225\pi}{180} = \frac{5\pi}{4}$

(9 -40°

$-40 \times \frac{\pi}{180} = \frac{-4\pi}{18} = -\frac{2\pi}{9}$

(24 330°

$330 \times \frac{\pi}{180} = \frac{33}{18}\pi = \frac{11\pi}{6}$

(26 $-\frac{\pi}{3}$

$-\frac{\cancel{\pi}}{3} \times \frac{180}{\cancel{\pi}} = \frac{180}{3} = -60^\circ$

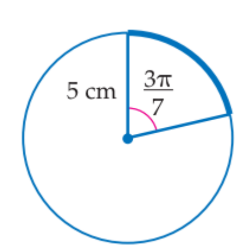
(10 **تنس طاولة :** تحرَّك لاعب تنس طاولة في مسار على شكل قوسٍ من دائرة. إذا كان طول نصف قطر دائرته هو $1.2\,m$، وزاوية دوران اللاعب تساوي 100°، فما طول هذا القوس، مقرّبًا إلى أقرب جزء من عشرة؟

$\theta = 100 \times \frac{\pi}{180} = \frac{10\pi}{18}$

$s = r\theta = \frac{10\pi}{18} \times 1.2 = 2.1\,m$

أوجد طول القوس المحدد في كلٍّ من الدائرتين الآتيتين، مقرّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

(31

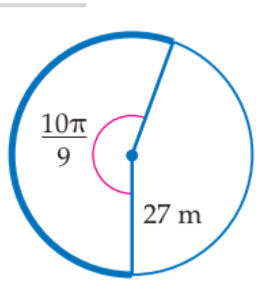


$S = r\theta$

$= 5 \times \frac{3\pi}{7} = \frac{15\pi}{7}$

$= 6.73\,cm$

(32



$S = r\theta$

$= 27 \times \frac{10\pi}{9}$

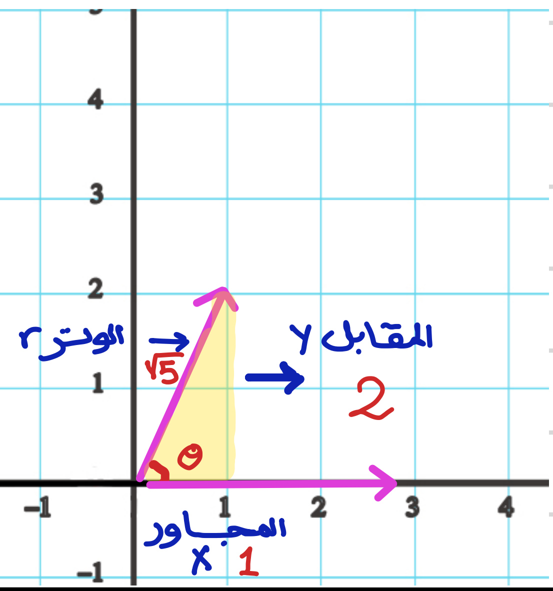
$= 94.75\,m$

4-3 الدوالّ المثلَّثية للزوايا
Trigonometric Functions of Angles

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمرُّ بإحدى النقاط الآتية في كلّ مرّة، فأوجد قيم الدوالّ المثلَّثية الستِّ للزاوية θ :

(1 $(\overset{x}{1}, \overset{y}{2})$

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$



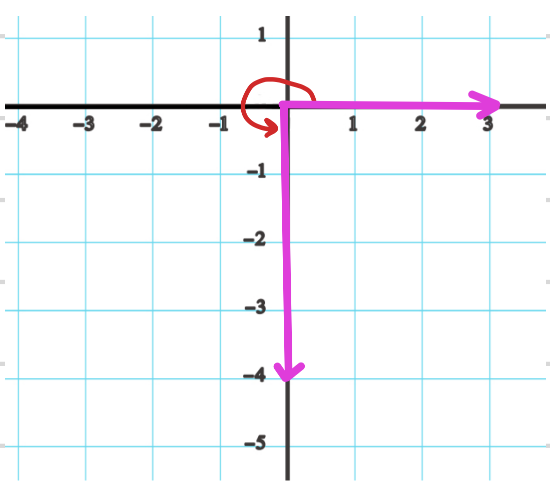
$\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ $\qquad \csc\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ $\qquad \sec\theta = \sqrt{5}$

$\tan\theta = \frac{2}{1}$ $\qquad \cot\theta = \frac{1}{2}$

(3 $(0, -4)$

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = \sqrt{16} = 4$



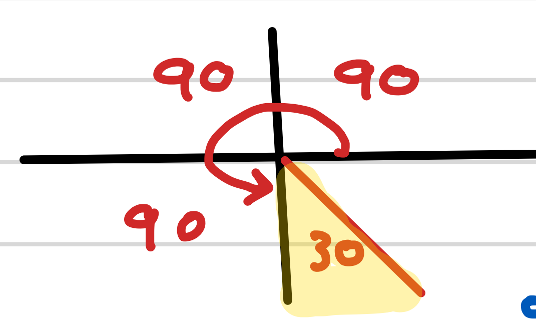
$\sin \frac{y}{r} = \frac{-4}{4} = -1$ $\qquad \csc\theta = \frac{r}{y} = -1$

$\cos \frac{x}{r} = \frac{0}{4} = 0$ $\qquad \sec\theta = \cancel{\frac{4}{0}}$ غير معرف

$\tan \frac{y}{x} = \cancel{\frac{-4}{0}}$ غير معرف $\qquad \cot\theta = \frac{0}{-4} = 0$

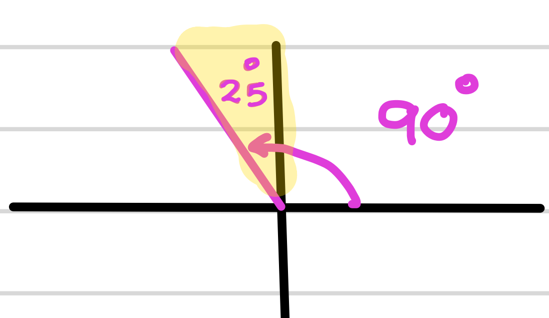
ارسم كلًّا من الزوايا الآتية في الوضع القياسي، ثم أوجد الزاوية المرجعية لها.

(4 $300°$



$360 - 300 = 30°$

(5 $115°$



$180° - 115° = 25°$

(18 $195°$

$195° - 180° = 15°$

أوجد القيمة الدقيقة لكلّ دالّة مثلّثية فيما يأتي:

① الربع	② الربع $180-\theta$ sin ⊕
④ الربع $360-\theta$ cos ⊕	③ الربع $\theta-180$ tan ⊕

(4A $\cos 135°$ تقع في الربع الثاني:-

١/ الزاوية المرجعية:-

$180-135=45°$

٢/ cos ← سالبة

٣/ القيمة:-

$\cos 135° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

(4B $\tan \frac{5\pi}{6}$ تقع في الربع الثاني

١/ الزاوية بالدرجات

$5 \times \frac{180}{6} = 5 \times 30 = 150$

٢/ الزاوية المرجعية:-

$180-150=30$

٣/ tan ← سالبة

٤/ القيمة:-

$-\tan 30 = \frac{-1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

١/ الزاوية المرجعية:-

$\pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{6-5}{6}\pi = \frac{\pi}{6}$

٢/ tan ← سالبة

٣/ $-\tan\frac{\pi}{6} = \frac{-1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

(7 $\sin \frac{3\pi}{4}$ تقع في الربع الثاني

١/ الزاوية بالدرجات

$\frac{3(180)}{4} = 3 \times 45 = 135$

٢/ الزاوية المرجعية:-

$180-135° = 45°$

٣/ sin ← موجبة

$\sin \frac{3\pi}{4} = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

١/ الزاوية المرجعية:-

$\pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{4-3}{4}\pi = \frac{\pi}{4}$

٢/ sin ← موجبة

٣/ $\sin\frac{3\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(8 $\tan \frac{5\pi}{3}$ تقع في الربع الرابع:-

١/ الزاوية بالدرجات:-

$\frac{5\pi}{3} = \frac{5 \times 180}{3} = 300$

٢/ الزاوية المرجعية:-

$360-300=60$

٣/ tan ← سالبة

$\tan\frac{5\pi}{3} = -\tan 60 = -\sqrt{3}$

١/ الزاوية المرجعية:-

$2\pi - \frac{5\pi}{3} = \frac{6-5}{3}\pi = \frac{\pi}{3}$

٢/ tan ← سالبة

٣/ القيمة:-

$\tan\frac{5\pi}{3} = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$

(10 $\sin 300°$ تقع في الربع الرابع

١/ الزاوية المرجعية :-

$360 - 300 = 60$

٢/ $\sin$ ← سالبة

٣/ القيمة :-

$\sin 300 = -\sin 60 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(9 $\sec 120°$ تقع في الربع الثاني

١/ الزاوية المرجعية :-

$180 - 120 = 60$

٢/ $\sec$ ← مقلوب $\cos$

سالبة

٣/ القيمة :-

$\sec 120 = \frac{1}{\cos 120} = \frac{1}{-\cos 60} = -2$

(25 $\tan 315°$ تقع في الربع الرابع

١/ الزاوية المرجعية

$360 - 315 = 45°$

٢/ $\tan$ ← سالبة

٣/ القيمة

$\tan 315 = -\tan 45° = -1$

(26 $\cos 150°$ تقع في الربع الثاني

١/ الزاوية المرجعية

$180 - 150 = 30$

٢/ $\cos$ ← سالبة

٣/ القيمة :-

$\cos 150° = -\cos 30 = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

(24 $\sin 210°$ تقع في الربع الثالث

١/ الزاوية المرجعية

$210 - 180 = 30$

٢/ $\sin$ ← سالبة

٣/ القيمة :-

$\sin 210 = -\sin 30 = \frac{-1}{2}$

(27 $\csc 225°$ تقع في الربع الثالث

١/ الزاوية المرجعية :-

$225 - 180 = 45$

٢/ $\csc$ ← مقلوب $\sin$

سالبة

٣/ القيمة :-

$\csc 225 = \frac{1}{\sin 225} = \frac{1}{-\sin 45} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$= -\frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{-2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$

(28 $\sin \frac{4\pi}{3}$

١/ الزاوية المرجعية :-

$\frac{4\pi}{3} - \pi = \frac{4-3}{3}\pi = \frac{\pi}{3}$

٢/ $\sin$ ← سالبة

٣/ القيمة :-

$\sin \frac{4\pi}{3} = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

١/ الزاوية بالدرجات :-

$4\left(\frac{180}{3}\right) = 4 \times 60 = 240$

٢/ الزاوية المرجعية :-

$240 - 180 = 60$

٣/ $\sin$ ← سالبة

٤/ القيمة :-

$-\sin 60 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

4-4 قانون الجيوب
Law of Sines

تحقق من فهمك

(1 أوجد مساحة $\triangle ABC$ الذي فيه: $A = 31°\ , b = 18\,m, c = 22\,m$ مقربةً إلى أقرب جزءٍ من عشرة.

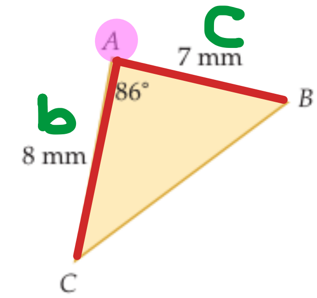
المساحة $= \frac{1}{2} b c \sin A$

$= \frac{1}{2} \times 18 \times 22 \sin 31°$

$= 198 \sin 31° = 101.97\ m^2$

أوجد مساحة $\triangle ABC$ في كلٍّ ممّا يأتي، مقرّبةً إلى أقرب جزء من عشرة.

(1



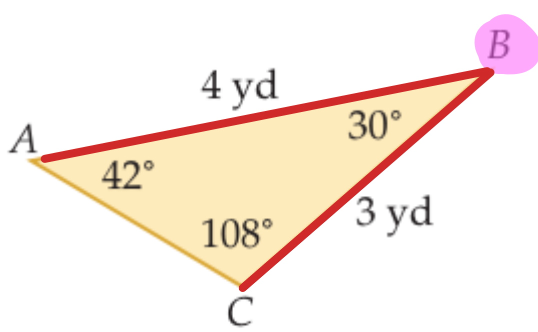
المساحة $= \frac{1}{2} b c \sin A$

$= \frac{1}{2}\, 8 \times 7 \sin 86$

$= 28 \sin 86$

$= 27.93\ mm^2$

(2



المساحة $= \frac{1}{2} a c \sin B$

$= \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \sin 30$

$= \frac{1}{2} \times 12 \times \frac{1}{2}$

$= 3\,yd^2$

(3 $A = 40°, b = 11\text{ cm}, c = 6\text{ cm}$

المساحة $= \frac{1}{2} b c \sin A$

$= \frac{1}{2} \times 11 \times 6 \sin 40°$

$= 21.21\ cm^2$

(4 $B = 103°\ , a = 20\text{ in}, c = 18\text{ in}$

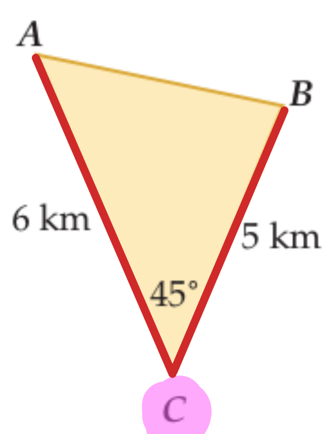
المساحة $= \frac{1}{2} a c \sin B$

$= \frac{1}{2} \times 20 \times 18 \sin 103°$

$= 180 \sin 103°$

$= 175.38°$

(13



المساحة $= \frac{1}{2} a b \sin C$

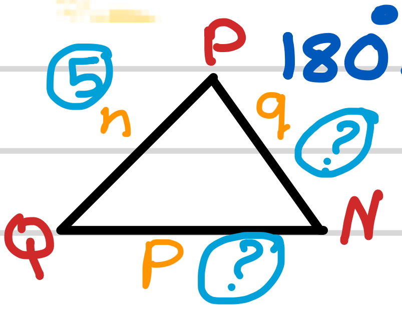
$= \frac{1}{2} \times 6 \times 5 \sin 45°$

$= 15 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 10.6\ km^2$

تحقق من فهمك

حَلّ مثلّث بمعلومية قياسي زاويتين فيه وطول أحد أضلاعه

2) حُلّ $\triangle NPQ$ الذي فيه: $n = 5$, $Q = 65°$, $P = 42°$، مقرّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة.



١/ إيجاد الزاوية N :-

$180 - (42 + 65) = \boxed{73°}$

٢/ إيجاد q :-

$\frac{\sin Q}{q} = \frac{\sin N}{n}$

$\frac{\sin 65°}{q} = \frac{\sin 73°}{5}$

$q = \frac{\sin 65° \times 5}{\sin 73°}$

$\boxed{q = 4.7}$

٣/ إيجاد P :-

$\frac{\sin P}{p} = \frac{\sin N}{n}$

$\frac{\sin 42°}{p} = \frac{\sin 73°}{5}$

$p = \frac{\sin 42° \times 5}{\sin 73°}$

$\boxed{p = 3.5}$

حَلّ مثلّث بمعلومية طولي ضلعين فيه وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما

3A) $\triangle RST$ الذي فيه: $s = 12$, $r = 10$, $R = 95°$ ← زاوية منفرجة

أكبر زاوية تقابل أكبر ضلع (قاعدة)

$r < s$

لايوجد حل

3B) $\triangle MNP$ الذي فيه: $p = 4$, $n = 7$, $N = 32°$ ← زاوية حادة

$n > p$ يوجد حل واحد

١/ نوجد الزاوية P

$\frac{\sin N}{n} = \frac{\sin P}{p}$

$\frac{\sin 32°}{7} = \frac{\sin P}{4}$

$\sin P = \frac{4 \times \sin 32°}{7}$

$\sin P = 0.30$

$\boxed{P = 17.6° \simeq 18°}$

٢/ نوجد الزاوية Q

$180 - (32 + 18) = \boxed{130°}$

٣/ نوجد m

$\frac{\sin N}{n} = \frac{\sin M}{m}$

$\frac{\sin 32°}{7} = \frac{\sin 130°}{m}$

$m = \frac{7 \sin 130}{\sin 32}$

$\boxed{m = 10.1}$

3C) $\triangle ABC$ الذي فيه: $b = 18$, $a = 15$, $A = 47°$

١/ قيمة h :-

$h = b\sin A = 18\sin 47° = 13.16$

$h < a < b$

يوجد حلان للمعادلة

الحالة الأولى :-

$\angle B$ حادة

١/ ايجاد الزاوية B

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

$$\frac{\sin 47°}{15} = \frac{\sin B}{18}$$

$$\sin B = \frac{18 \times \sin 47°}{15}$$

$$\sin B = 0.877$$

$$B = 61.28 \approx \boxed{61°}$$

٢/ إيجاد الزاوية C :-

$$C = 180° - (61° + 47°)$$

$$= 180 - 108 = \boxed{72°}$$

٣/ إيجاد C :-

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$$

$$\frac{\sin 47°}{15} = \frac{\sin 72°}{c}$$

$$c = \frac{15\sin 72°}{\sin 47°}$$

$$\boxed{c \approx 19.5}$$

الحالة الثانية :-

$\angle B$ منفرجة

١/ إيجاد الزاوية B

مكملة $B \approx 180 - 61° \approx \boxed{119°}$

٢/ ايجاد الزاوية C :-

$$C \approx 180° - (47° + 119°)$$

$$\approx 180 - 116 \approx \boxed{14°}$$

٣/ إيجاد C :-

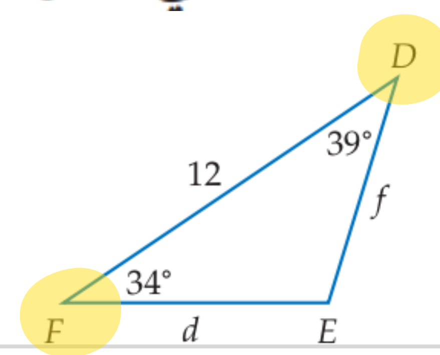
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$$

$$\frac{\sin 47°}{15} = \frac{\sin 14°}{c}$$

$$c \approx \frac{15 \times \sin 14°}{\sin 47°}$$

$$\boxed{c \approx 5}$$

حُلّ كلَّ مثلَّث مما يأتي، مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة:

5) 

زاويتين :

إيجاد الزاوية E :

$180-(34^\circ+39^\circ)$
$= 180 - 73 = \boxed{107^\circ}$

٢/ إيجاد d

$\frac{\sin E}{e} = \frac{\sin D}{d}$

$\frac{\sin 107}{12} = \frac{\sin 39^\circ}{d}$

$d = \frac{12 \times \sin 39}{\sin 107}$

$\boxed{d = 7.9}$

٣/ إيجاد f :-

$\frac{\sin E}{e} = \frac{\sin F}{f}$

$\frac{\sin 107}{12} = \frac{\sin 34}{f}$

$f = \frac{12 \times \sin 34}{\sin 107}$

$\boxed{f = 7.01}$

حدد إن كان للمثلَّث ABC في كلٍّ ممّا يأتي حلّ واحد، أم حلّان، أم ليس له حلّ. أوجد الحلول، مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

8) $b = 12$, $a = 19$, $A = 95^\circ$ ⟵ زاوية منفرجة

$a > b$ يوجد حل واحد

١/ قياس الزاوية B :-

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$

$\frac{\sin 95^\circ}{19} = \frac{\sin B}{12}$

$\sin B = \frac{12 \times \sin 95^\circ}{19}$

$\sin B = 0.63$

$\boxed{B \approx 39^\circ}$

٢/ إيجاد الزاوية C :-

$C = 180^\circ - (95^\circ + 39^\circ) = \boxed{46^\circ}$

٣/ إيجاد c :-

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$

$\frac{\sin 95^\circ}{19} = \frac{\sin 46^\circ}{c}$

$c = \frac{19 \sin 46^\circ}{\sin 95^\circ}$

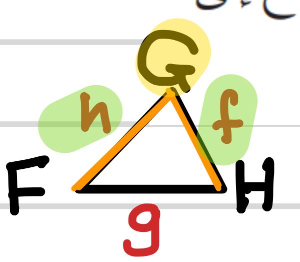
$\boxed{c = 13.7}$

4-5 قانون جيوب التمام
Law of Cosines

حَلَّ مثلَّث بمعلومية طولي ضلعين فيه وقياس الزاوية المحصورة بينهما

تحقق من فهمك

1) حُلَّ $\triangle FGH$ الموضَّح في الشكل المجاور الذي فيه: $h = 4$, $f = 6$, $G = 82°$ مقرِّبًا طول الضلع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسَي الزاويتين إلى أقرب درجة.



١/ إيجاد الضلع g :ـ

$$g^2 = h^2 + f^2 - 2hf\cos G$$
$$= (4)^2 + (6)^2 - 2 \times 4 \times 6 \cos 82$$
$$= 16 + 36 - 48 \cos 82°$$
$$g^2 = 45.32$$
$$\boxed{g = 6.7}$$

٢/ إيجاد الزاوية F :ـ

$$\frac{\sin G}{g} = \frac{\sin F}{f}$$
$$\frac{\sin 82}{6.7} = \frac{\sin F}{6}$$
$$\sin F = \frac{6 \times \sin 82}{6.7}$$
$$\sin F = 0.88 \qquad \boxed{F \approx 62°}$$

٣/ الزاوية الثالثة (H) :ـ

$$m\angle H = 180 - (62 + 82) = 180 - 144 \approx \boxed{36°}$$

حل مثلّث بمعلومية أطوال أضلاعه الثلاثة

تحقق من فهمك

2) حُلّ $\triangle ABC$ الذي فيه: $a = 5, b = 11, c = 8$ مقرّبًا قياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

١/ إيجاد الزاوية الكبرى B :-

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$(11)^2 = 5^2 + 8^2 - 2(5)(8)\cos B$$

$$121 = 25 + 64 - 80\cos B$$

$$-80\cos B = 121 - 89 = 32$$

$$\cos B = \frac{32}{-80}$$ بالقسمة على -80

$$\boxed{B \approx 114^\circ}$$

٢/ إيجاد الزاوية A :-

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a}$$

$$\frac{\sin 114^\circ}{11} = \frac{\sin A}{5}$$

$$\sin A = \frac{5 \times \sin 114}{11} = 0.415$$

$$A \approx 25^\circ$$

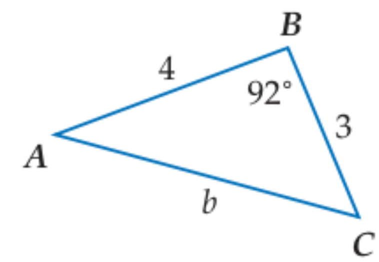
٣/ إيجاد الزاوية C :-

$$C = 180^\circ - (114^\circ + 25^\circ) \approx 41^\circ$$

تأكد

حُلَّ كلَّ مثلَّث ممّا يأتي مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

(1



١/ إيجاد b :-

$b^2 = a^2 + C^2 - 2aC \cos B$

$= 3^2 + 4^2 - 2(3)(4) \cos 92°$

$b^2 = 25.84$

$\boxed{b = 5.08}$

٢/ إيجاد الزاوية A :-

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$

$\frac{\sin A}{3} = \frac{\sin 92°}{5.08}$

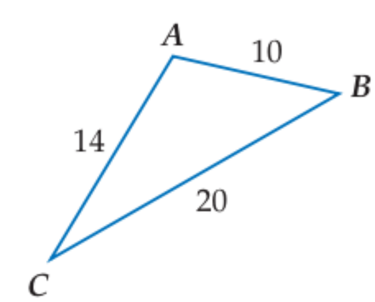
$\sin A = \frac{3 \times \sin 92°}{5.08}$

$A \approx 36°$

٣/ إيجاد الزاوية الثالثة C :-

$C = 180° - (36° + 92°) = 180° - 128° \approx 51°$

(2



١/ إيجاد الزاوية الكبرى (A) :-

$a^2 = b^2 + C^2 - 2bC \cos A$

$20^2 = 14^2 + 10^2 - 2(14)(10) \cos A$

$400 = 196 + 100 - 280 \cos A$

$400 - 296 = -280 \cos A$

$\cos A = \frac{-104}{280}$

$\boxed{A \approx 112°}$

٢/ إيجاد الزاوية B :-

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$

$\frac{\sin 112°}{20} = \frac{\sin B}{14}$

$\sin B = \frac{14 \sin 112°}{20}$

$\boxed{B \approx 40°}$

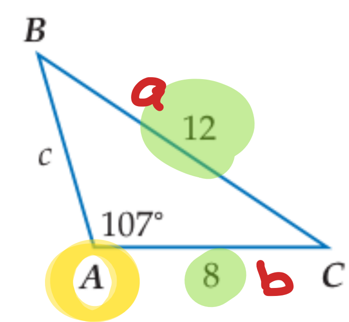
٣/ إيجاد الزاوية C :-

$C = 180 - (112 + 40) \approx \boxed{28°}$

حدّد أنسب طريقة يجب البدء بها (قانون الجيوب أم جيوب التمام) لحَلّ كلّ مثلّث ممّا يأتي، ثم حُلّ المثلّث مقرّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

نستعمل قانون الجيوب أولاً

5)



١/ إيجاد الزاوية B :-

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

$$\frac{\sin 107}{12} = \frac{\sin B}{8}$$

$$\sin B = \frac{8 \sin 107}{12}$$

$$\boxed{B \approx 40^\circ}$$

٢/ إيجاد الزاوية C :-

$$C = 180 - (40 + 107) \approx 33^\circ$$

٣/ إيجاد c :-

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$$

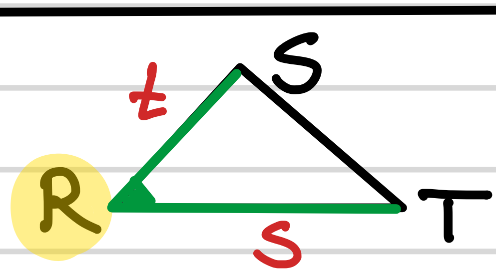
$$\frac{\sin 107}{12} = \frac{\sin 33}{c}$$

$$c = \frac{12 \times \sin 33}{\sin 107}$$

$$\boxed{c = 6.83}$$

---

7) $\triangle RST$ الذي فيه: $R = 35°, s = 16, t = 9$.



نستخدم قانون جيوب التمام أولاً :-

١/ نوجد r :-

$$r^2 = s^2 + t^2 - 2st \cos R$$

$$r^2 = 16^2 + 9^2 - 2(16)(9) \cos 35^\circ$$

$$= 259 + 81 - 288 \cos 35^\circ$$

$$r^2 = 101.08 \qquad \boxed{r = 10.1}$$

٢/ نوجد الزاوية T :-

$$\frac{\sin R}{r} = \frac{\sin T}{t}$$

$$\frac{\sin 35^\circ}{10.1} = \frac{\sin T}{9}$$

$$\sin T = \frac{9 \sin 35^\circ}{10.1}$$

$$\sin T = 0.51$$

$$\boxed{T = 31^\circ}$$

٣/ نوجد الزاوية S :-

$$S \approx 180 - (35^\circ + 31^\circ)$$

$$180 - 66^\circ \approx \boxed{114^\circ}$$

تحقق من فهمك

1) إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $P\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$، فأوجد كلًّا من $\cos\theta, \sin\theta$.

$\cos\theta = \frac{3}{5}$ $\sin\theta = \frac{-4}{5}$

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة P، فأوجد كلًّا من $\cos\theta, \sin\theta$ في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $P\left(\frac{15}{17}, \frac{8}{17}\right)$

$\cos\theta = \frac{15}{17}$

$\sin\theta = \frac{8}{17}$

2) $P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

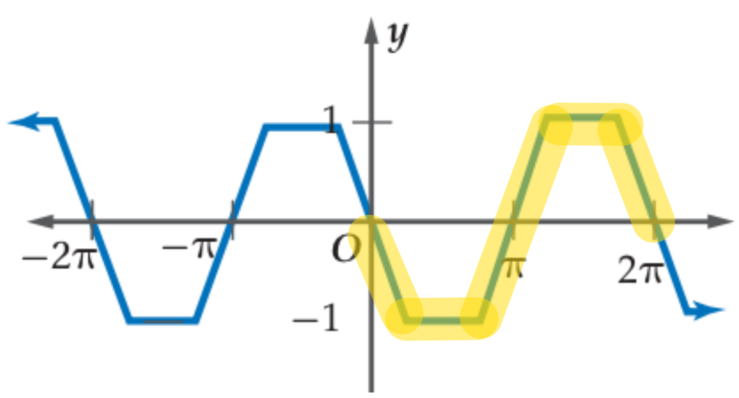
11) $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\theta = \frac{1}{2}$

تحقق من فهمك

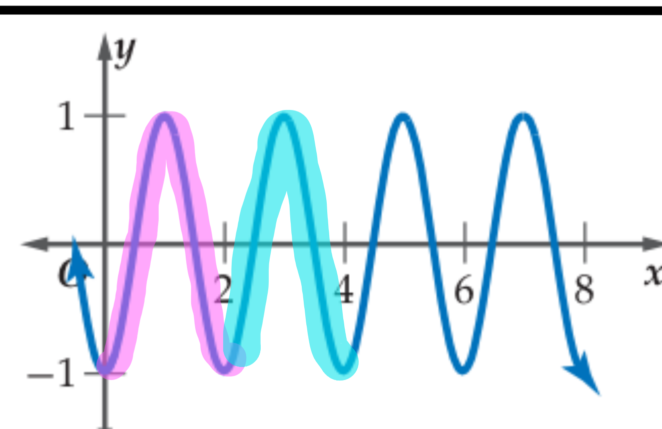
2) أوجد طول الدورة للدالّة الممثلة بيانيًّا في الشكل المجاور.



طول الدورة $= 2\pi$

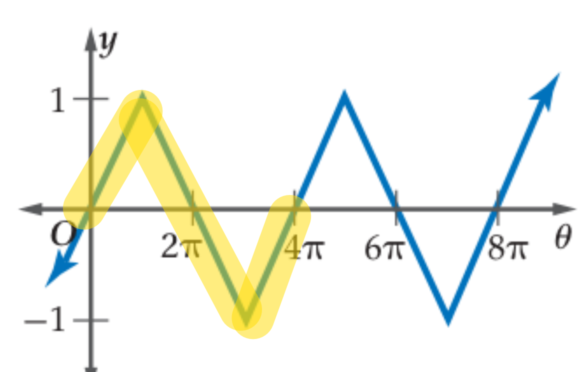
---

3)



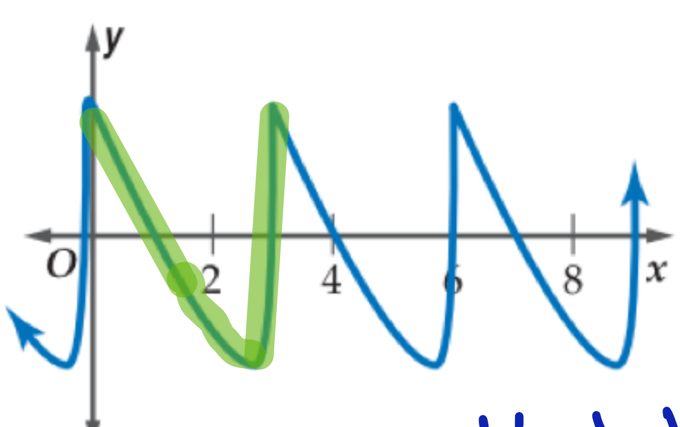
طول الدورة $= 2$

4)



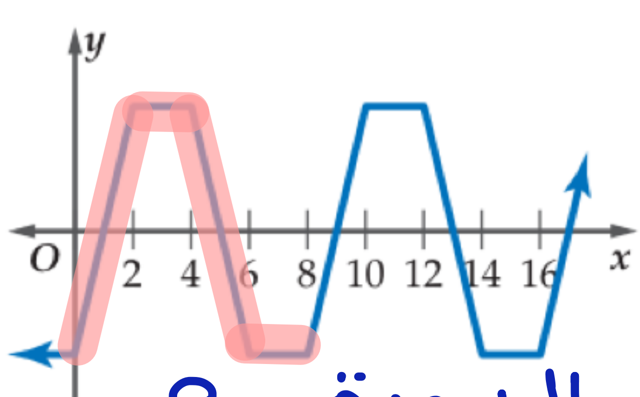
طول الدورة $= 4\pi$

13)



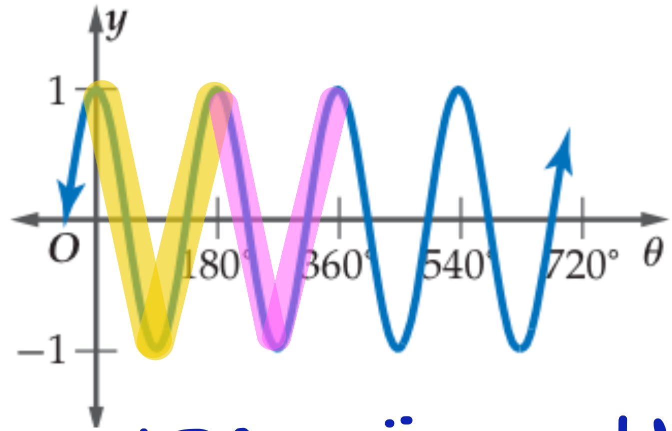
طول الدورة $= 3$

14)



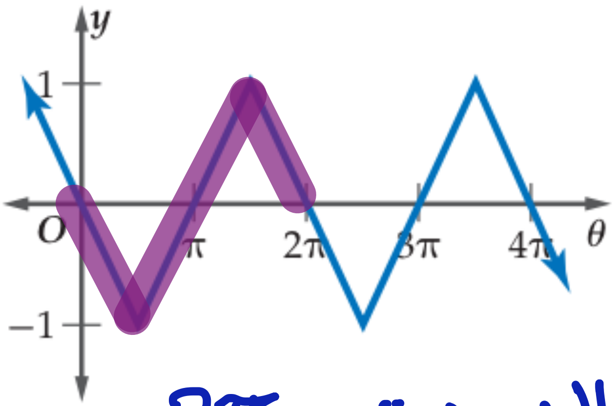
طول الدورة $= 8$

(15



طول الدورة = 180

(16



طول الدورة = 2π

أوجد القيمة الدقيقة لكلّ دالّة مثلّثية ممّا يأتي:

(4A $\sin 420°$

١/ الزاوية في نطاق 0° إلى 360°

$420 - 360° = 60°$

تقع في الربع الأول

٢/ القيمة:

$\sin 420° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(4B $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

١/ الزاوية بالدرجات:

$-\frac{3(180)}{4} = -3 \times 45 = -145°$

٢/ الزاوية في نطاق 0 إلى 360°:

$-145° + 360° = 225°$

تقع في الربع الثالث

٣/ الزاوية المرجعية:

$225° - 180° = 45°$

٤/ الإشارة: cos ← سالبة

٥/ القيمة:

$\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\cos 45°$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2}$

(7 $\sin(-60°)$

١/ الزاوية في نطاق 0 إلى 360°

$-60 + 360° = 300°$

تقع في الربع الرابع

٢/ الزاوية المرجعية:

$360° - 300 = 60°$

٣/ الإشارة: sin ← سالبة

٤/ القيمة:

$\sin(-60) = -\sin 60$

$= \frac{-\sqrt{3}}{2}$

(8 $\cos 540°$

١/ الزاوية في نطاق 0 إلى 360°

$540 - 360° = 180$

٢/ القيمة:

$\cos 540° = \cos 180 = -1$

$\sin 180 = 0$

$\sin\frac{13\pi}{6}$ (6

١/ الزاوية بالدرجات :-

$\frac{13(180)}{6} = 13\times 30 = 390$

٢/ الزاوية في نطاق 0 إلى 360° :-

$390 - 360 = 30°$

لم تقع في الربع الأول

٣/ القيمة :-

$\sin\frac{13\pi}{6} = \sin 30 = \frac{1}{2}$

$\cos 450°$ (20

١/ الزاوية في نطاق 0 إلى 360°

$450 - 360° = 90°$

٢/ القيمة :-

$\cos 450 = \cos 90° = 0$

$\sin 90° = 1$

$\cos 45° - \cos 30°$ (26

$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}$

$6(\sin 30°)(\sin 60°)$ (27

$= 6\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \frac{\cancel{6}^{3}\sqrt{3}}{\cancel{2}\times 2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$(\sin 45°)^2 + (\cos 45°)^2$ (30

$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$= \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = \frac{4}{4} = 1$

$\frac{(\cos 30°)(\cos 150°)}{\sin 315°}$ (31

$= \frac{(\cos 30°)(-\cos 30°)}{(-\sin 45)°}$

$= \frac{-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$

$= \frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{3\times \cancel{2}}{\cancel{4}\times\sqrt{2}}$

$= \frac{3}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

4-7 تمثيل الدوالّ المثلّثية بيانيًّا
Graphing Trigonometric Functions

أوجد السعة وطول الدورة لكلِّ دالّة فيما يأتي:

(1A $y = \cos \frac{1}{2}\theta$

السعة =

طول الدورة = $\frac{360}{\frac{1}{2}} = 360 \times 2 = 720^\circ$

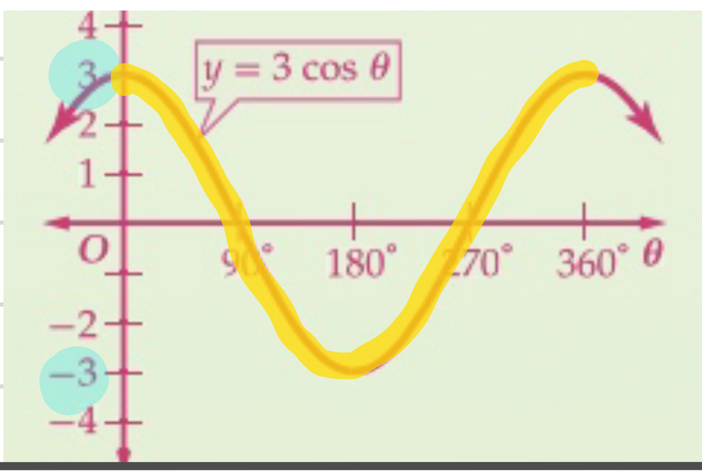
(1B $y = 3 \sin 5\theta$

السعة = 3

طول الدورة = $\frac{360}{5} = 72^\circ$

تحقق من فهمك مثِّل كلًّا من الدالّتين الآتيتين بيانيًّا:

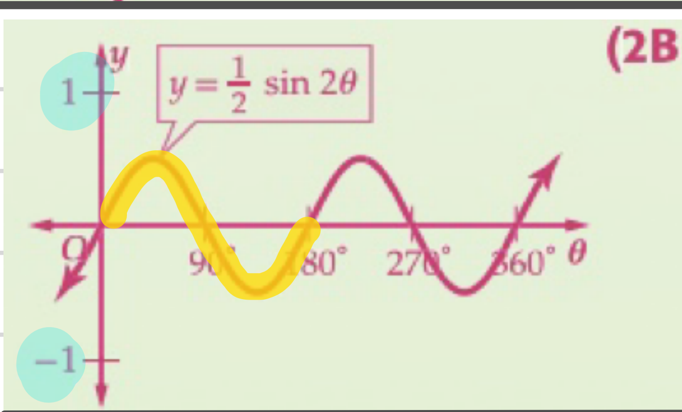
(2A $y = 3 \cos \theta$



السعة = 3

طول الدورة = $\frac{360}{1} = 360^\circ$

(2B $y = \frac{1}{2} \sin 2\theta$

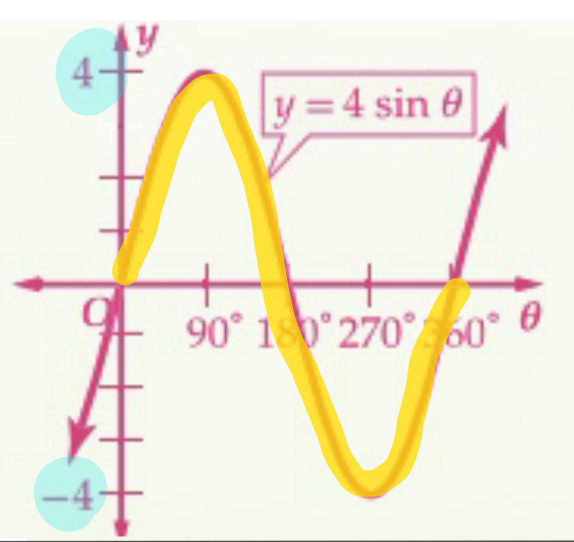


السعة = $\frac{1}{2}$

طول الدورة = $\frac{360}{2} = 180^\circ$

تأكد أوجد السعة وطول الدورة لكلِّ دالّة مما يأتي، ثم مثّلها بيانيًّا:

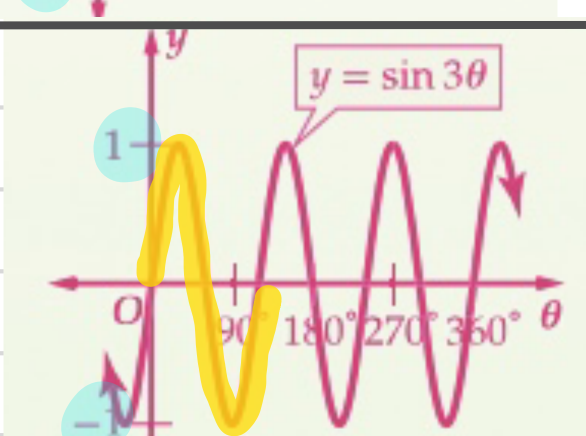
(1 $y = 4 \sin \theta$



السعة = 4

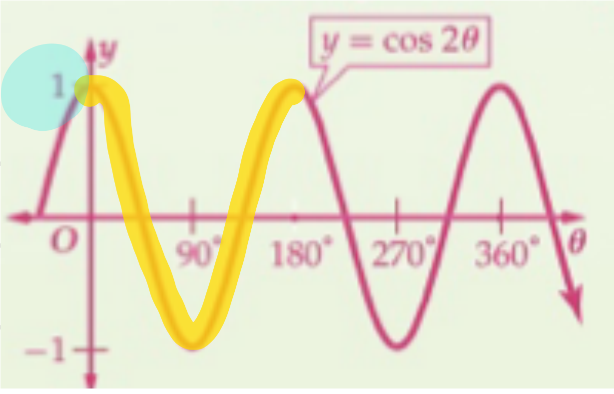
طول الدورة = $\frac{360}{1} = 360^\circ$

(2 $y = \sin 3\theta$



السعة = 3

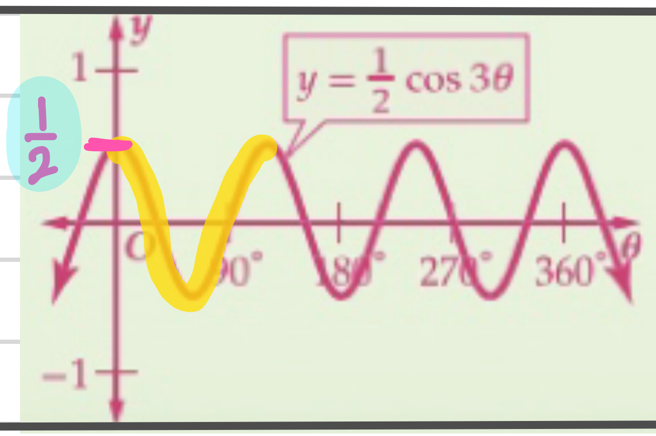
طول الدورة = $\frac{360}{3} = 120^\circ$



3) $y=\cos 2\theta$

السعة $= 1$

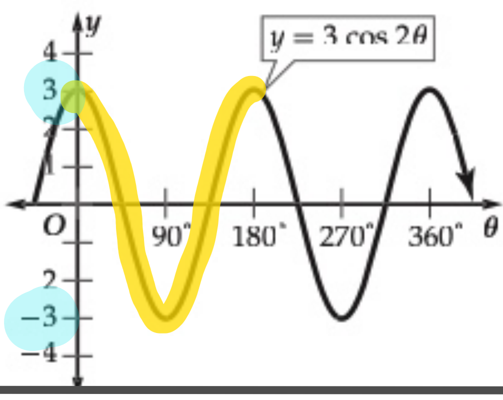
طول الدورة $= 180^\circ = \dfrac{360}{2}$



4) $y=\dfrac{1}{2}\cos 3\theta$

السعة $= \dfrac{1}{2}$

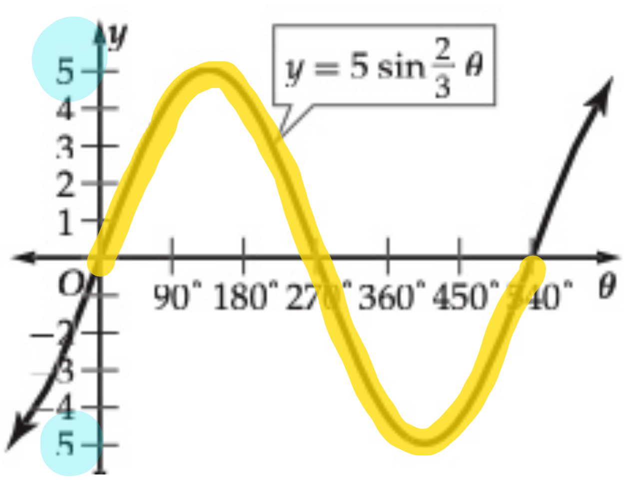
طول الدورة $= 120^\circ = \dfrac{360}{3}$



15) $y=3\cos 2\theta$

السعة $= 3$

طول الدورة $= 180^\circ = \dfrac{360}{2}$



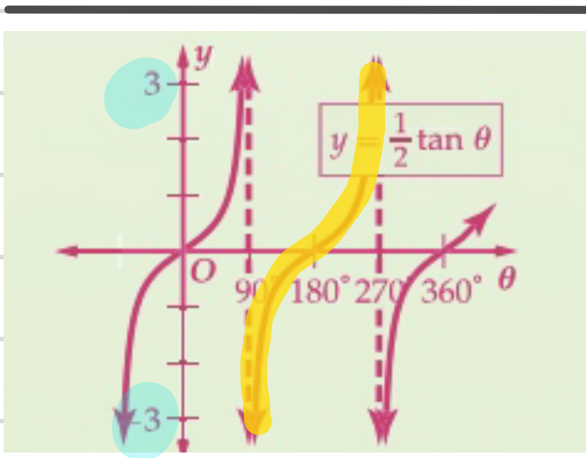
16) $y=5\sin\dfrac{2}{3}\theta$

السعة $= 5$

طول الدورة =

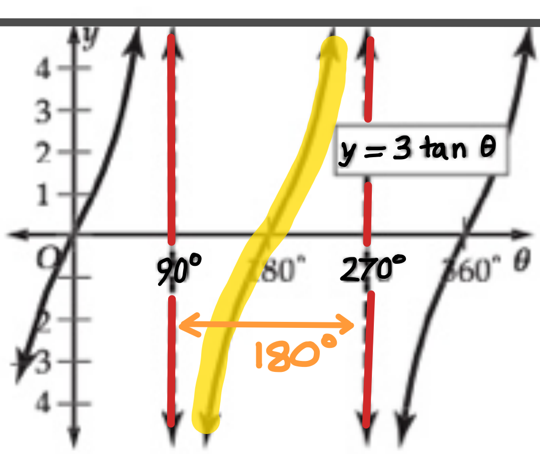
$$\frac{360}{\frac{2}{3}} = \frac{360\times 3}{2} = 540$$

تحقق من فهمك



4) أوجد طول دورة الدالّة $y=\dfrac{1}{2}\tan\theta$. ثم مثّل هذه الدالّة بيانيًّا.

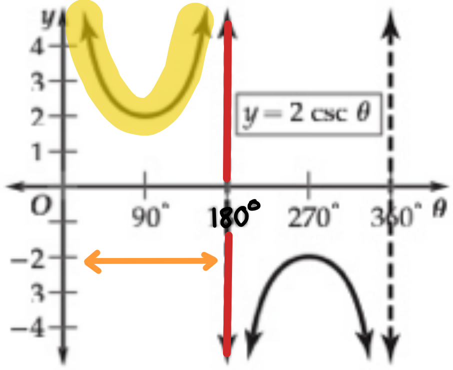
طول الدورة $= \dfrac{180}{1} = 180$



6) $y=3\tan\theta$

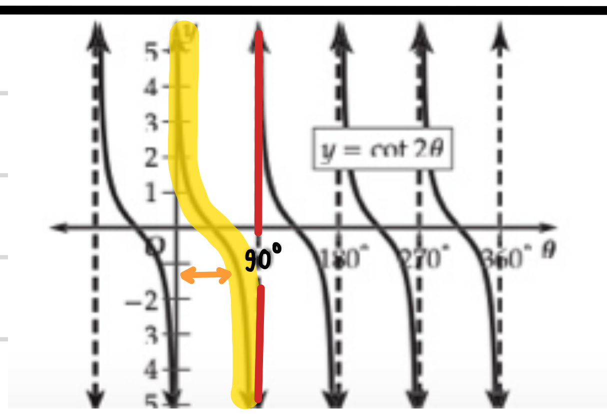
طول الدورة $= 180$

$y = 2\csc\theta$ (7



طول الدورة $= 180$

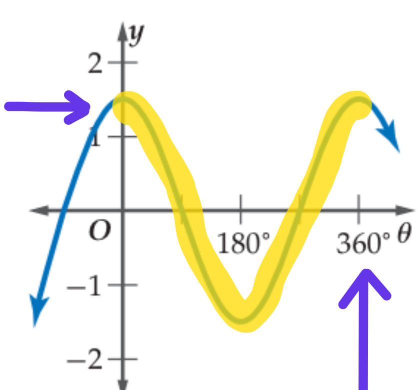
$y = \cot 2\theta$ (8



طول الدورة $= \frac{180}{2} = 90^\circ$

حدّد طول دورة كلٍّ من الدوالّ الممثّلة بيانيًّا فيما يأتي، ثم اكتب قاعدتها:

(32



السعة

$a = 3$

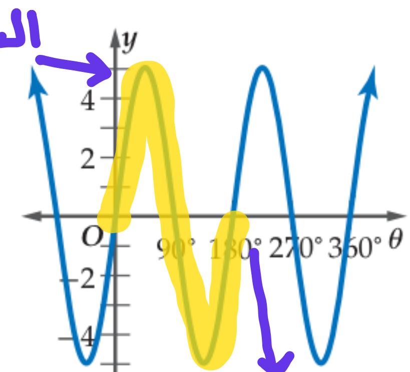
طول الدورة $= 360$

$b = 1$

الدالة :- $y = a\cos b\theta$

$y = 3\cos\theta$

(33



السعة

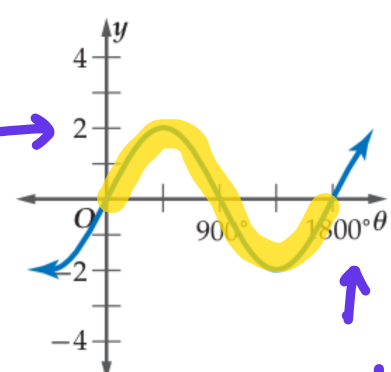
$a = 5$

طول الدورة $= 180^\circ$

$\frac{360}{b} = 180 \Rightarrow b = \frac{360}{180} = 2$

الدالة :- $y = 5\sin 2\theta$

(34



السعة $= 2$

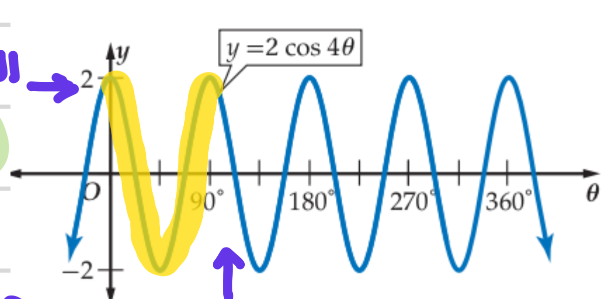
طول الدورة $= 1800$

$\frac{360}{b} = 1800 \Longrightarrow b = \frac{360}{1800} = \frac{1}{20}$

الدالة :- $y = a\sin b\theta$

$y = 2\sin\frac{1}{20}\theta$

(35



السعة

$a = 2$

طول الدورة $= 90^\circ$

$\frac{360}{b} = 90^\circ \Rightarrow b = \frac{360}{90} = 4$

الدالة :- $y = 2\cos 4\theta$

الدوال المثلثية العكسية

معكوس الدالة المثلثية :

يستعمل لإيجاد قياس الزاوية

$y = \sin x$

معكوس هو :

$x = \sin y$

دالة الجيب العكسية

$y = \text{Arcsin } x$

$y = \sin^{-1} x$

المجال $-1 \le x \le 1$

المدى $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

$-90° \le y \le 90°$

نفس المجال

نفس المدى

دالة جيب التمام العكسية

$y = \text{Arccos } x$

$y = \cos^{-1} x$

المجال $-1 \le x \le 1$

المدى $0 \le y \le \pi$

$0° \le y \le 180°$

تذكر ⁉️

الدالة ومعكوسها

كل منهما عكسية للاخرى

دالة الظل العكسية

$y = \text{Arctan } x$

$y = \text{Tan}^{-1} x$

المجال الأعداد الحقيقة

المدى $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

$-90° \le y \le 90°$

العلاقة

$y = \cos^{-1} x$

إذا كانت $x = ½$

فإن $y =$

60^0 ، 300^0

الدالة

$y = \cos^{-1} x$

إذا كانت $x = ½$

فإن $y =$

60^0

معكوس الدالة المثلثية

العلاقة التي تعكس
فيها قيم x , y
هو $y = sin\ x$
$x = sin\ y$

معكوس الدالة
ليس دالة إلا إذا تم
تحديد مجال الدالة

تسمى القيم في المجال المحدد
القيم الأساسية , فالدوال
المثلثية ذات المجال المحدد
تمثل بأحرف كبيرة

الدالة العكسية	الرموز	المجال	الدالة
دالة الجيب العكسية	$y = Sin^{-1}x$	$[-1 , 1]$	$\frac{-\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ $-90^{\circ} \le y \le 90^{\circ}$
دالة جيب التمام العكسية	$y = Cos^{-1}x$	$[-1 , 1]$	$0 \le y \le \pi$ $0^{\circ} \le y \le 180^{\circ}$
دالة الظل العكسية	$y = Tan^{-1}x$	مجموعة الأعداد الحقيقية	$\frac{-\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ $-90^{\circ} \le y \le 90^{\circ}$